SPEKTRALNO BIPARTICIONIRANJE GRAFA

Seminarski rad

Ivančica Mirošević

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
Sveučilište u Splitu

Smjernice

- Model grafa
- Ciljne funkcije particioniranja
- Laplacijan i normalizirani Laplacijan grafa
- Diskretna formulacija problema particioniranja
- Realna relaksacija diskretnog problema
- Biparticijski i k-particijski algoritam
- Primjer

Model grafa

(G, t) je jednostavni konačni neusmjereni težinski graf, gdje je $G = (V, B)$.

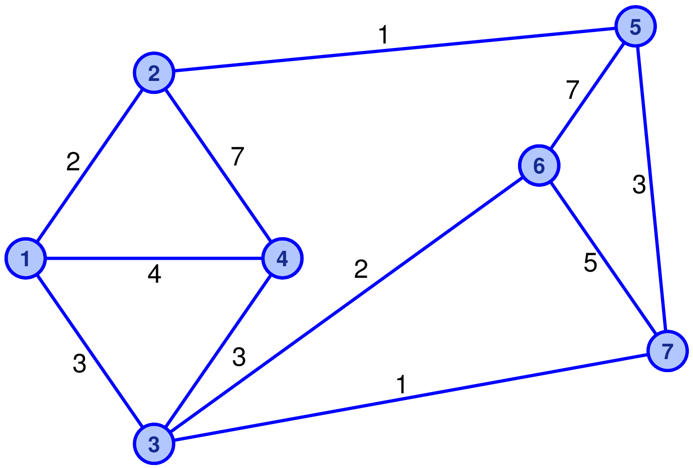
$\emptyset \neq V = \{1, 2, 3, ..., n\}$ je skup vrhova.

B skup bridova $\{i, j\}$, $i, j \in V$, s težinama bridova $t(\{i, j\}) \in \mathbb{R}^+$.

Definicija 1 *Matrica susjedstva grafa G je $n \times n$ matrica $W = [w_{ij}]$, gdje je*

$$w_{ij} = \begin{cases} t(\{i, j\}), & \text{ako je } \{i, j\} \in B, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primjer grafa (G_{mali})



$$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Rez particije

Neka su $V_1, V_2 \subset V$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$. Definirajmo

$$\mathrm{rez}(V_1, V_2) = \sum_{i \in V_1, j \in V_2} w_{ij},$$

$$t\left(i\right) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$$

i

$$t(V_l) = \mathrm{rez}(V_l, V) = \sum_{i \in V_l} t_i = \sum_{i \in V_l} \sum_{j \in V} w_{ij}$$

Ciljne funkcije particioniranja

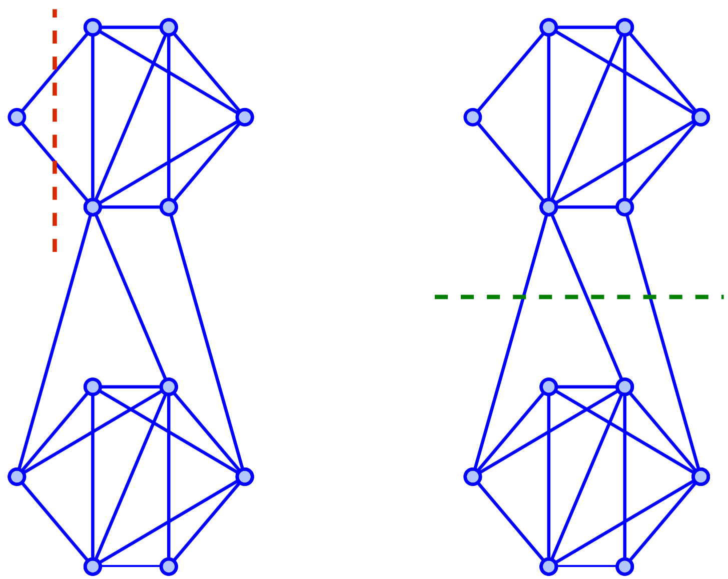
Razmjerni rez:

$$R(V_1, V_2) = \frac{\mathrm{rez}(V_1, V_2)}{|V_1|} + \frac{\mathrm{rez}(V_1, V_2)}{|V_2|}$$

Normalizirani rez:

$$N(V_1, V_2) = \frac{\mathrm{rez}(V_1, V_2)}{t(V_1)} + \frac{\mathrm{rez}(V_1, V_2)}{t(V_2)}$$

Rez vs. razmjerni i normalizirani rez



Lijeva particija:	Desna particija:
$\mathrm{rez}(V_1, V_2) = 2$	$\mathrm{rez}(V_1', V_2') = 3$
$R(V_1, V_2) = \frac{2}{1} + \frac{2}{11} = 2.18$	$R(V_1', V_2') = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$
$N(V_1, V_2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{50} = 1.04$	$N(V_1', V_2') = \frac{3}{27} + \frac{3}{25} = 0.23$

NP-težak optimizacijski problem

Teorem 1 (Papadimitrou, 1997) *Problem normaliziranog reza grafa je NP-težak.*

Drugim riječima, problem razmjernog i normaliziranog reza najvjerojatnije nisu rješivi egzaktnim algoritmom u polinomnom vremenu.

Laplacijan grafa

Definicija 2 *Laplacijan* $L = L_G = [l_{ij}]$ *grafa* G *je realna* $n \times n$ *matrica, s jednim retkom i stupcem za svaki vrh, takva da je*

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} w_{ik} & , i = j \\ -w_{ij} & , i \neq j \, , \{i, j\} \in B \, . \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases}$$

Neka je I_G $|V| \times |B|$ matrica incidencije grafa G u kojoj svakom vrhu grafa odgovara jedan redak, a svakom bridu jedan stupac. U stupcu koji odgovara bridu $\{i, j\}$ sve su vrijednosti 0, osim u i-tom i j-tom retku, gdje su redom $\sqrt{w_{ij}}$ i $-\sqrt{w_{ij}}$.

Laplacijan i matrica incidencije grafa G_{mali}

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & -2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \mathbf{10} & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \mathbf{9} & -3 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & -7 & -3 & \mathbf{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{11} & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -7 & \mathbf{14} & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -5 & \mathbf{9} \end{bmatrix},$$

$$I_G = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{7} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\sqrt{7} & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{7} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{7} & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{5} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Svojstva Laplacijana (1)

Teorem 2 *Laplacijan $L = L_G$ grafa G ima sljedeća svojstva:*

(i) $L = D - W$, *gdje je* W *matrica susjedstva, i* D *dijagonalna matrica težina vrhova* ($d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$)*;*

(ii) $L = I_G I_G^T$*;*

(iii) L *je simetrična, pozitivno semi-definitna matrica. Sve svojstvene vrijednosti od* L *su realne i nenegativne, i* L *ima puni skup od* N *realnih ortogonalnih svojstvenih vektora;*

Svojstva Laplacijana (2)

(iv) $L\mathbf{1} = 0$, *za* $\mathbf{1} = [1, ..., 1]^T$. 0 *je svojstvena vrijednost matrice* L *i* $\mathbf{1}$ *je odgovarajući svojstveni vektor;*

(v) *Ako graf* G *ima* c *komponenti povezanosti, onda* L *ima* c *svojstvenih vrijednosti jednakih* 0*;*

(vi) *Za svaki vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *je*

$$\mathbf{x}^T L\mathbf{x} = \sum_{i<j} w_{ij} \left(x_i - x_j\right)^2 ;$$

(vii) *Za svaki vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *i skalare* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *je*

$$\left(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{1}\right)^T L \left(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{1}\right) = \alpha^2 \mathbf{x}^T L\mathbf{x}.$$

Normalizirani Laplacijan

Definicija 3 *Normalizirani Laplacijan* $L_n = [l_{n_{ij}}]$ *grafa* G *je realna* $n \times n$ *matrica, s jednim retkom i stupcem za svaki vrh, takva da je*

$$l_{n_{ij}} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ -\frac{w_{ij}}{\sqrt{d_{ii}}\sqrt{d_{jj}}} & , i \neq j \, , \{i, j\} \in B \\ 0 & , \textit{ inače} \end{cases} .$$

Normalizirani Laplacijan grafa G_{mali}

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{9}\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{9}} & -\frac{4}{\sqrt{9}\sqrt{14}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{9}\sqrt{10}} & 1 & 0 & -\frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{11}} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{9}} & 0 & 1 & -\frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{14}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{9}\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{9}} \\ -\frac{4}{\sqrt{9}\sqrt{14}} & -\frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{14}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{11}} & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{11}\sqrt{9}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{9}\sqrt{14}} & 0 & -\frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{14}} & 1 & -\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{9}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{9}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}\sqrt{9}} & -\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{9}} & 1 \end{bmatrix}$$

O spektralnom radijusu matrica L i L_n

Teorem 3 *Najveća svojstvena vrijednost* λ_n *Laplacijana* L *zadovoljava*

$$\lambda_n \leq 2 \max_{i=1,\cdots,n} d_{ii},$$

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij},\ i = 1, ..., n.$$

Teorem 4 *Za spektar normaliziranog Laplacijana vrijedi*

$$\sigma\left(L_n\right) \subseteq [0, 2].$$

Diskretna formulacija problema

Neka je $\pi = \{V_1, V_2\}$ particija skupa V. Particiju određuje vektor $\mathbf{y}$ zadan s

$$y_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{za } i \in V_1 \\ -\frac{1}{2} & \text{za } i \in V_2 \end{cases}$$

Problem razmjernog reza:

$$\min_{\substack{y_i \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \\ |\mathbf{y}^T \mathbf{1}| \leq \beta}} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (y_i - y_j)^2 w_{ij}$$

Problem normaliziranog reza:

$$\min_{\substack{y_i \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \\ |\mathbf{y}^T D \mathbf{1}| \leq \beta}} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (y_i - y_j)^2 w_{ij}$$

Relaksacija problema

Relaksirani problem razmjernog reza:

$$\min_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |\mathbf{y}^T \mathbf{1}| \leq \frac{2\beta}{\sqrt{n}} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1}} \quad \mathbf{y}^T L \mathbf{y}$$

Relaksirani problem normaliziranog reza:

$$\min_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |\mathbf{y}^T D \mathbf{1}| \leq \frac{\beta}{\sqrt{\theta n}} \\ \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = 1}} \quad \mathbf{y}^T L \mathbf{y}$$

Rješenje relaksacije problema (1)

Teorem 5 *Neka je* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simetrična matrica sa svojstvenim vrijednostima* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n$ *i odgovarajućim ortonormiranim svojstvenim vektorima* $\mathbf{v}^{[1]}, \mathbf{v}^{[2]}, \ldots, \mathbf{v}^{[n]}$*. Tada, za fiksni* $0 \leq \alpha < 1$*, problem*

$$\min_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n \\ |\mathbf{y}^T\mathbf{v}^{[1]}|\leq\alpha \\ \mathbf{y}^T\mathbf{y}=1}} \quad \mathbf{y}^T A \mathbf{y}$$

ima rješenje $y = \pm\alpha\mathbf{v}^{[1]} \pm \sqrt{1-\alpha^2}\mathbf{v}^{[2]}$.

Rješenje relaksacije problema (2)

Korolar 1 *Za* $0 \leq \beta < \frac{n}{2}$ *problem razmjernog reza grafa* G

$$\min_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |\mathbf{y}^T \mathbf{1}| \leq \frac{2\beta}{\sqrt{n}} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1}} \mathbf{y}^T L \mathbf{y}$$

ima rješenje

$$\mathbf{y} = \pm \frac{2\beta}{n\sqrt{n}} \mathbf{1} \pm \sqrt{1 - 4\frac{\beta^2}{n^2}} \mathbf{v}^{[2]},$$

gdje je $\mathbf{v}^{[2]}$ *Fiedlerov vektor Laplacijana grafa* G.

Rješenje relaksacije problema (3)

Korolar 2 *Za* $0 \leq \beta < \sqrt{\theta n}\left\|D^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}\right\|_2$ *problem normaliziranog reza grafa* G

$$\min_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ |\mathbf{y}^T D\mathbf{1}|\leq\frac{\beta}{\sqrt{\theta n}} \\ \mathbf{y}^T D\mathbf{y}=1}} \quad \mathbf{y}^T L\mathbf{y}$$

ima rješenje

$$\mathbf{y} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{\theta n}\left\|D^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}\right\|_2^2}\mathbf{1} \pm \sqrt{1-\frac{\beta^2}{\theta n\left\|D^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}\right\|_2^2}}\,D^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}^{[2]},$$

gdje je $D^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}^{[2]}$ *normalizirani Fiedlerov vektor normaliziranog Laplacijana.*

Rekonstrukcija particije

Prema definiciji particijskog vektora, skupovi V_1 i V_2 su sada određeni s

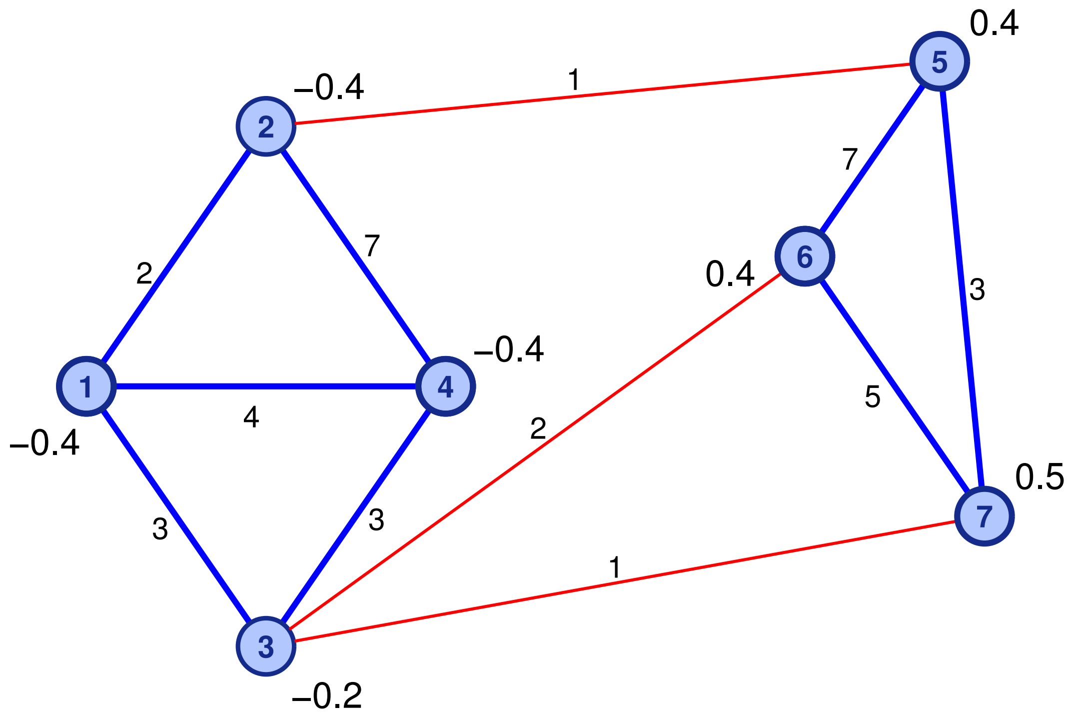
$$V_1 = \{i : \mathbf{v}^{[2]}(i) < 0\}, \quad V_2 = \{i : \mathbf{v}^{[2]}(i) \geq 0\}, \qquad (1)$$

u nenormaliziranom, odnosno s

$$V_1 = \{i : D^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}^{[2]}(i) < 0\}, \quad V_2 = \{i : D^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}^{[2]}(i) \geq 0\} \qquad (2)$$

u normaliziranom slučaju.

Komponente Fiedlerovog vektora grafa G_{mali}



Biparticijski algoritam za minimizaciju razmjernog reza

1. Za zadanu matricu susjedstva W izračunaj matricu težina vrhova D, i Laplacijan $L = D - W$;
2. Izračunaj drugi svojstveni vektor matrice L, $\mathbf{v}^{[2]}$;
3. Rekonstruiraj particiju prema predznacima komponenti vektora $\mathbf{v}^{[2]}$.

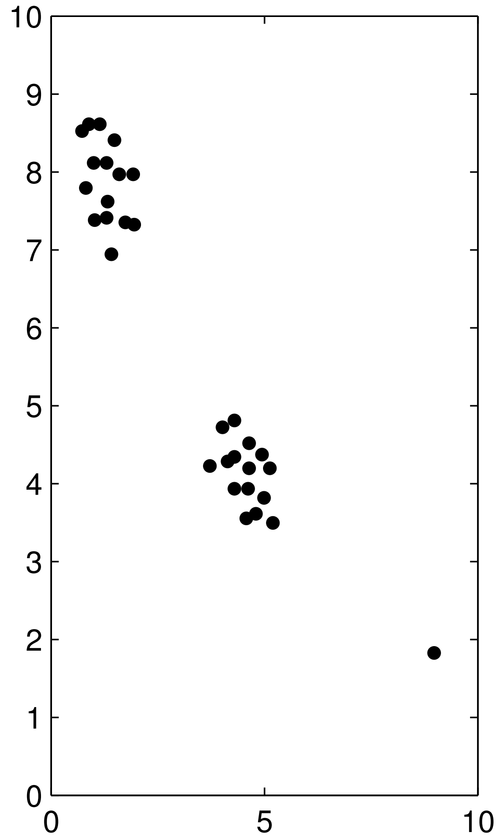
Biparticijski algoritam za minimizaciju normaliziranog reza

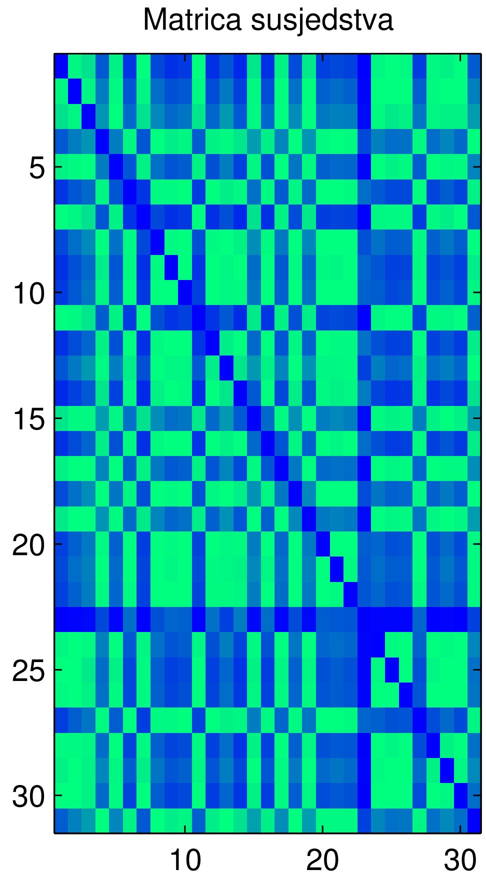
1. Za zadanu matricu susjedstva W izračunaj matricu težina vrhova D, i normalizirani Laplacijan $L_n = D^{-\frac{1}{2}}\left(D - W\right)D^{-\frac{1}{2}}$;

2. Izračunaj drugi svojstveni vektor matrice L_n, $\mathbf{w}^{[2]}$ i vektor $\mathbf{z}^{[2]} = D^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}^{[2]}$;

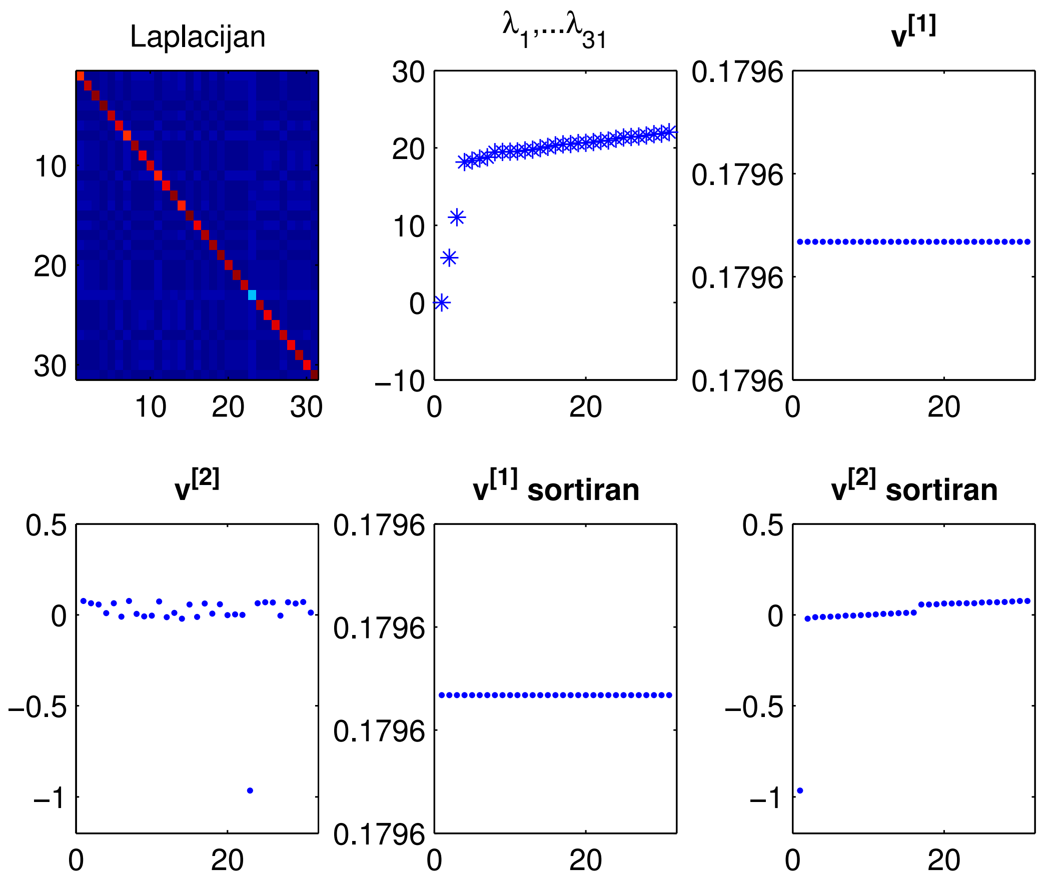
3. Rekonstruiraj particiju prema predznacima komponenti vektora $\mathbf{z}^{[2]}$.

Razmjerni rez vs. normalizirani rez (1)

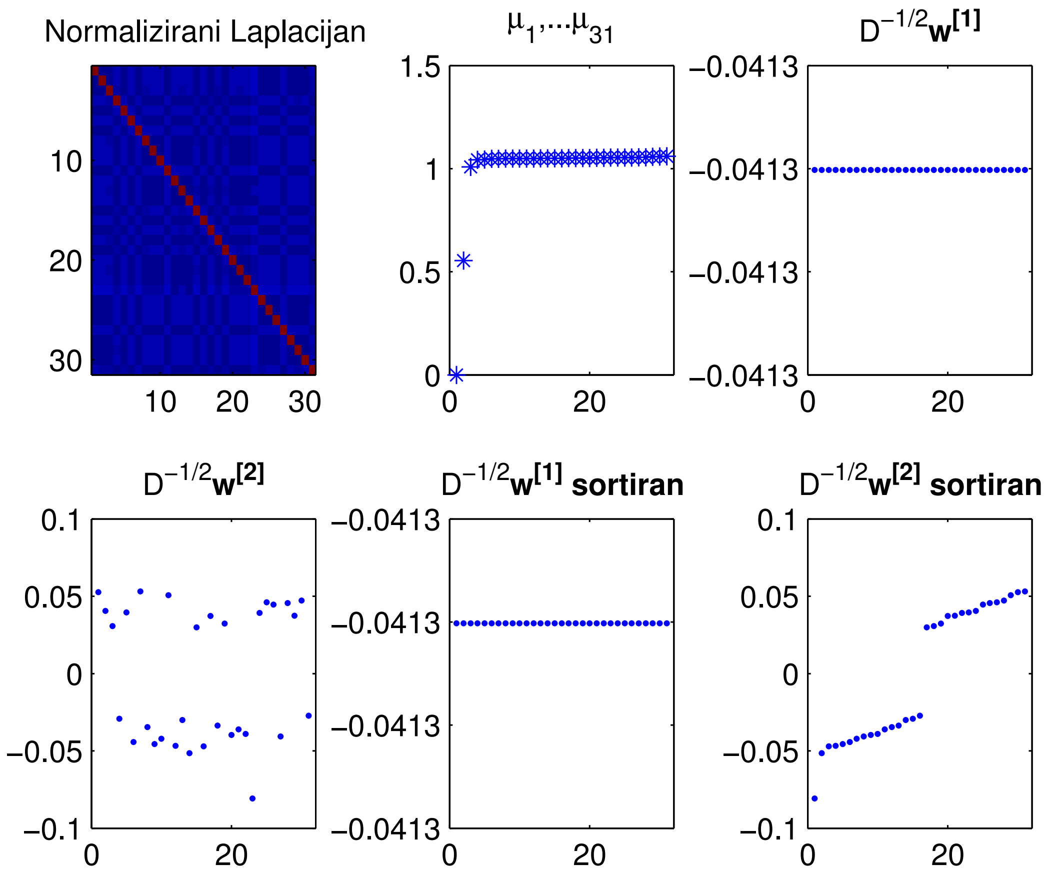




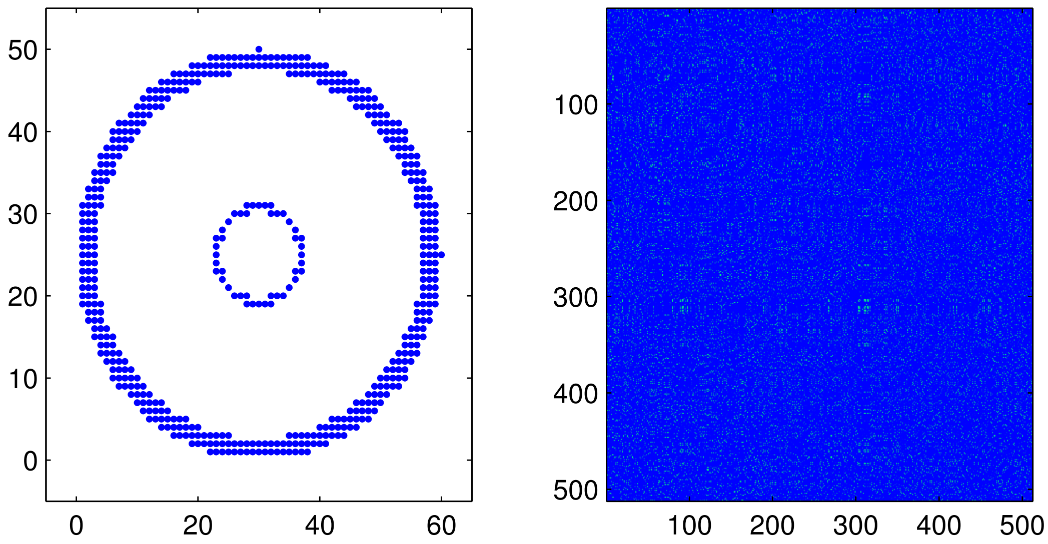
Razmjerni rez vs. normalizirani rez (2)



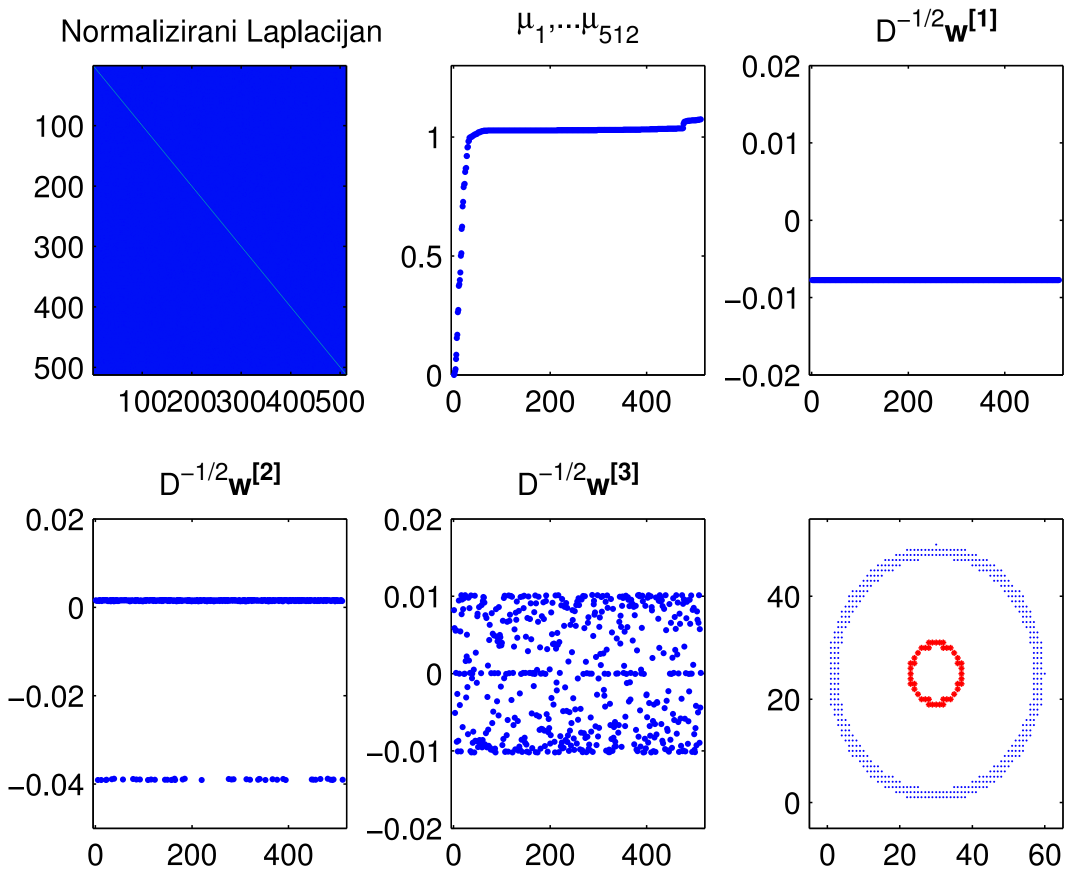
Razmjerni rez vs. normalizirani rez (3)



Dva koncentrična prstena (1)



Dva koncentrična prstena (2)



k-particijski algoritam

1. Biparticijskim algoritmom odredi optimalnu biparticiju skupa V; Postavi brojač $k_{pom} = 2$;

2. Provjeri je li $k_{pom} = k$. Ako nije,

   - za svaku podskupinu skupa V odredi optimalnu biparticiju;
   - među dobivenim $(k_{pom} + 1)$-particijama odaberi onu s najmanjom vrijednošću ciljne funkcije;
   - postavi $k_{pom} = k_{pom} + 1$ i ponovi korak 2.

3. Stani.

Primjer k-particioniranja