

Ivan Slapničar

Matematika 3

Radna verzija

w w w . f e s b . u n i s t . h r / m a t 3

Split, 2019.

Sadržaj

Popis slika	5
Predgovor	7
1. VEKTORSKA ANALIZA	1
1.1 Vektorska funkcija skalarne varijable	1
1.2 Derivacija vektorske funkcije	3
1.3 Integral vektorske funkcije	5
1.4 Skalarna i vektorska polja	6
1.5 Gradijent, divergencija i rotacija	8
1.6 Potencijalna i solenoidalna polja	11
1.7 Usmjerene derivacije	13
2. KRIVULJNI INTEGRALI	17
2.1 Glatka krivulja	17
2.2 Krivuljni integral skalarnog polja	19
2.3 Krivuljni integral vektorskog polja	22
2.3.1 Cirkulacija	24
2.4 Potencijal	26
2.5 Greenova formula	28
3. PLOŠNI INTEGRALI	31
3.1 Glatka ploha	31
3.2 Plošni integral skalarnog polja	36
3.3 Plošni integral vektorskog polja	38
3.4 Teoremi o divergenciji, gradijentu i rotoru	44
3.5 Stokesova formula	46

Popis slika

2.1	Po djelovima glatka krivulja	18
2.2	Neprekidne orijentacija krivulje	18
2.3	Orijentacija po djelovima glatke krivulje	19
2.4	Luk krivulje C	20
2.5	Ravninske krivulje	21
2.6	Pozitivno orijentirana kružnica	25
2.7	Pozitivno orijentirani trokut	25
2.8	Put integracije uzduž koordinatnih osiju	27
2.9	Zatvoreni skup D	29
2.10	Područje s više zatvorenih krivulja	29
2.11	Primjena Greenovog teorema	29
3.1	Parametrizacija plohe	32
3.2	Ploha parametrizirana s dva sustava	32
3.3	Po dijelovima glatka ploha	34
3.4	Element površine plohe	35
3.5	Dio središnje jedinične sfere	37
3.6	Neprekidne orijentacije glatke plohe	38
3.7	Möbiusova vrpca	38
3.8	Orijentacija po dijelovima glatke plohe	39
3.9	Vanjska i unutrašnja orijentacija sfere	39
3.10	Desna orijentirana polusfera	42
3.11	Projekcije desne orijentirane polusfere na yz -ravninu i xy -ravninu	44
3.12	Konzistentne orijentacije plohe i njenog ruba	47
3.13	Gornja polusfera i njen rub	48

Predgovor

Ovaj udžbenik namijenjen je studentima STEM (Science – Technology – Engineering – Mathematics) područja, odnosno studentima područja koje spadaju u znanost, tehnologiju, inženjerstvo i matematiku.

U udžbeniku je izloženo gradivo predmeta "Matematika 3" po sadržaju koji se predaje na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu (FESB). Obrađena su poglavlja *Vektorska analiza*, *Krivuljni integrali* i *Plošni integrali*. Sličan sadržaj nalazi se u većini istoimenih predmeta za studente STEM područja.

Budući se radi o standardnom sadržaju, nije citirana posebna literatura. U izradi ovog udžbenika korištena su iskustva i zabilješke bivših i sadašnjih nastavnika FESB-a pa im ovom prilikom zahvaljujem.

Dio udžbenika izrađen je u okviru I-projekta Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske *Matematika 3 – digitalni udžbenik*.

U Splitu, ožujka 2019.

Ivan Slapničar

Copyright © 2019, Ivan Slapničar. Sva prava pridržana.

Poglavlje 1

VEKTORSKA ANALIZA

1.1	Vektorska funkcija skalarne varijable	1
1.2	Derivacija vektorske funkcije	3
1.3	Integral vektorske funkcije	5
1.4	Skalarna i vektorska polja	6
1.5	Gradijent, divergencija i rotacija	8
1.6	Potencijalna i solenoidalna polja	11
1.7	Usmjerene derivacije	13

1.1 Vektorska funkcija skalarne varijable

Neka V_0 označava skup svih radijus-vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ [M1, poglavlje 3.4],

$$V_0 = \{ \overrightarrow{OM} \mid M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Definicija 1.1 *Vektorska funkcija skalarne varijable* (kraće: *vektorska funkcija*) je svaka funkcija

$$\mathbf{w} : D \rightarrow V_0, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Za svaku točku $t \in D$ je $\mathbf{w}(t)$ radijus-vektor pa ga možemo razložiti po komponentama:

$$\mathbf{w}(t) = w_x(t) \mathbf{i} + w_y(t) \mathbf{j} + w_z(t) \mathbf{k}. \tag{1.1}$$

Komponente vektorske funkcije su prema tome tri funkcije n varijabli,

$$w_x, w_y, w_z : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Za razliku od funkcija jedne ili više varijabli koje smo razmatrali u kolegijima Matematika 1 i Matematika 2, vektorske funkcije nemaju graf u klasičnom smislu te riječi. Umjesto toga definiramo *hodograf* ili *trag* vektorske funkcije \mathbf{w} kao skup svih točaka koje opisuju vrhovi radijus-vektora $\mathbf{w}(t)$ kada t poprima vrijednosti iz domene D .

Primjer 1.1 i) Za $n = 3$ možemo promatrati vektorsku funkciju $\mathbf{w}(T)$ koja svakoj točki u prostoru pridružuje vektor koji opisuje smjer i iznos strujanja zraka (vjetra) u toj točki.

ii) Posebno nas zanima slučaj kada je $n = 1$, odnosno kada je $D \subseteq \mathbb{R}$. Izrazom

$$\mathbf{w}(t) = \cos \pi t \mathbf{i} + 2 \sin \pi t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

zadana je cilindrična eliptička spirala. Krivulja leži na plaštu eliptičkog cilindra [M2, poglavlje 3.4.5]

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

a sastoji se od točaka $(x(t), y(t), z(t))$ gdje je

$$x(t) = \cos \pi t, \quad y(t) = 2 \sin \pi t, \quad z(t) = 2t.$$

Ovo je ujedno i primjer parametarskog načina zadavanja prostorne krivulje.

Zadatak 1.1 Izračunajte vrijednosti vektorske funkcije iz primjera 1.1 ii) za $t = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, -1/2$. Zadanu spiralu prvo skicirajte, a potom nacrtajte pomoću programa NetPlot.

Od sada nadalje pretpostavit ćemo da je $n = 1$, odnosno $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija 1.2 Vektor \mathbf{a} je *limes* vektorske funkcije $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ u točki t_0 ,

$$\mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{w}(t),$$

pri čemu je $t \in (t_1, t_2) \subseteq D$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tako da } |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{w}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon.$$

Ova definicija je formalno jednaka definiciji limesa funkcije jedne varijable [M1, definicija 4.5], s time što $|\mathbf{w}(t) - \mathbf{a}|$ označava duljinu vektora $\mathbf{w}(t) - \mathbf{a}$ odnosno udaljenost vektora $\mathbf{w}(t)$ i \mathbf{a} : ako je $\mathbf{w}(t)$ zadan s (1.1) i

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

onda je [M1, poglavlje 3.6]

$$|\mathbf{w}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(w_x(t) - a_x)^2 + (w_y(t) - a_y)^2 + (w_z(t) - a_z)^2}.$$

Napomena 1.1 Iz definicije 1.2 također slijedi

$$\mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{w}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = \lim_{t \rightarrow t_0} w_x(t), \\ a_y = \lim_{t \rightarrow t_0} w_y(t), \\ a_z = \lim_{t \rightarrow t_0} w_z(t). \end{cases}$$

Iz ovog rastava po komponentama i definicija skalarnog i vektorskog produkta (vidi [M1, poglavlje 3.9] i [M1, poglavlje 3.10]) slijede standardne tvrdnje o limesu zbroja i produkta: ako svi limesi postoje, onda vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{w} + \mathbf{u})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{w}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{w}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{w} \times \mathbf{u})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{w}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Nakon što smo definirali limes, prirodno slijedi definicija neprekidnosti koja je identična onoj iz [M1, poglavlje 4.4].

Definicija 1.3 Funkcija $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ je *neprekidna u točki* $t_0 \in D$ ako i samo ako je

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t_0).$$

Funkcija \mathbf{w} je *neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki $t \in D$.

Iz definicije neprekidnosti slijedi da je vektorska funkcija neprekidna ako i samo ako su njene komponente w_x , w_y i w_z neprekidne funkcije. Na primjer, funkcija \mathbf{w} iz primjera 1.1 ii) je očito neprekidna.

Napomena 1.2 Definicije 1.2 i 1.3 vrijede i kada je $n > 1$, s time što u definiciji 1.2 umjesto $|t - t_0| < \delta$ uzimamo otvorenu kuglu oko točke t_0 , odnosno pišemo $t \in K(t_0, \delta)$ (vidi [M2, definicija 3.4]).

1.2 Derivacija vektorske funkcije

Definicija 1.4 *Derivacija* vektorske funkcije $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ u točki t_0 je limes

$$\mathbf{w}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_0)}{t - t_0},$$

ako taj limes postoji. Na ovaj način definirali smo novu funkciju $\mathbf{w}'(t)$ koju zovemo *derivacija funkcije* \mathbf{w} . Funkcija \mathbf{w} je *derivabilna* ako ima derivaciju u svakoj točki $t \in D$.

Za prikaz po komponentama vrijedi

$$\mathbf{w}'(t) = w'_x(t) \mathbf{i} + w'_y(t) \mathbf{j} + w'_z(t) \mathbf{k},$$

što se vidi uvrštavanjem prikaza 1.1 u gornji limes. Drugim riječima, funkcija \mathbf{w} ima derivaciju u točki t ako i samo ako sve njene komponente imaju derivaciju u točki t .

Slično kao u [M1, poglavlje 5.1], derivaciju također možemo definirati pomoću izraza

$$\mathbf{w}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{w}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t)}{\Delta t}.$$

Primjer 1.2 Neka je

$$\mathbf{s}(t) = \cos \pi t \mathbf{i} + 2 \sin \pi t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, \quad t \geq 0,$$

jednažba gibanja materijalne točke. Brzina $\mathbf{v}(t)$ i ubrzanje $\mathbf{a}(t)$ te točke u trenutku t su dani s

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{s}'(t) = -\pi \sin \pi t \mathbf{i} + 2\pi \cos \pi t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}, \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{v}'(t) = \mathbf{s}''(t) = -\pi^2 \cos \pi t \mathbf{i} - 2\pi^2 \sin \pi t \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je \mathbf{k} komponenta ubrzanja jednaka nuli, što je logično je je komponenta gibanja u smjeru \mathbf{k} linerana pa nema promjene brzine.

Teorem 1.1 Neka su $\mathbf{w}, \mathbf{u} : D \rightarrow V_0$ derivabilne vektorske funkcije i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna (skalarna) funkcija. Vrijedi

- i) $(\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u})' = \lambda \mathbf{w}' + \mu \mathbf{u}'$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- ii) $(f \mathbf{w})' = f' \mathbf{w} + f \mathbf{w}'$,
- iii) $\left(\frac{\mathbf{w}}{f}\right)' = \frac{f \mathbf{w}' - f' \mathbf{w}}{f^2}$, uz $f \neq 0$,
- iv) $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})' = \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}'$,
- v) $(\mathbf{w} \times \mathbf{u})' = \mathbf{w}' \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}'$.

Dokaz. Tvrdnje se dokazuju direktno pomoću definicije derivacije.

v) Vrijedi

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{w} \times \mathbf{u})'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{w} \times \mathbf{u})(t + \Delta t) - (\mathbf{w} \times \mathbf{u})(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{w}(t + \Delta t) \times \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t) \times \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{w}(t) \times \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t) \times \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{w}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t)) \times \mathbf{u}(t + \Delta t)}{\Delta t} \\
 &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{w}(t) \times (\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t))}{\Delta t}.
 \end{aligned}$$

■

Zadatak 1.2 Dokažite još barem jednu tvrdnju teorema 1.1.

Diferencijal definiramo slično kao kod funkcije jedne varijable [M1, poglavlje 5.2]:

$$d\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}'(t)dt.$$

Teorem 1.1 vrijedi i za diferencijale.

Formulu za derivaciju složene funkcije daje nam sljedeći teorem kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 1.2 (Derivacija složene funkcije) Neka je $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ i $\varphi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $\varphi[D_1] \subseteq D$. Ako su funkcije \mathbf{w} i φ derivabilne, onda je

$$\frac{d(\mathbf{w}(\varphi(t)))}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \equiv \mathbf{w}'(\varphi) \cdot \varphi'(t).$$

1.3 Integral vektorske funkcije

Definicija 1.5 Derivabilna vektorska funkcija $\mathbf{u} : D \rightarrow V_0$ je *primitivna funkcija* vektorske funkcije \mathbf{w} na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$ ako je

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{w}(t), \quad \forall t \in D.$$

Integral vektorske funkcije \mathbf{w} na segmentu $[a, b] \subseteq D$ je vektor

$$\int_a^b \mathbf{w}(t) dt = \mathbf{u}(b) - \mathbf{u}(a).$$

Kažemo da je \mathbf{w} *integrabilna* na segmentu $[a, b]$. Ako zapisujemo po komponentama, onda je

$$\int_a^b \mathbf{w}(t) dt = \mathbf{i} \int_a^b w_x(t) dt + \mathbf{j} \int_a^b w_y(t) dt + \mathbf{k} \int_a^b w_z(t) dt.$$

Primitivne funkcije se međusobno razlikuju za konstantni vektor. Nadalje, slično kao u [M2, teorem 2.3], svaku primitivnu funkciju možemo dobiti pomoću

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{w}(x) dx \tag{1.2}$$

za neki t_0 .

Teorem 1.3 (Svojstva integrala vektorske funkcije) *Neka su funkcije \mathbf{w} , \mathbf{v} i φ integrabilne na segmentu $[a, b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

S1. svojstvo linearnosti,

$$\int_a^b (\lambda \mathbf{w}(t) + \mu \mathbf{v}(t)) dt = \lambda \int_a^b \mathbf{w}(t) dt + \mu \int_a^b \mathbf{v}(t) dt,$$

S2. nejednakost trokuta¹

$$\left| \int_a^b \mathbf{w}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\mathbf{w}(t)| dt,$$

S3. i dvije formule za parcijalnu integraciju

$$\int_a^b \mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) dt = \mathbf{w}(b) \cdot \mathbf{v}(b) - \mathbf{w}(a) \cdot \mathbf{v}(a) - \int_a^b \mathbf{w}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt,$$

$$\int_a^b \varphi(t) \mathbf{w}'(t) dt = \varphi(b) \mathbf{w}(b) - \varphi(a) \mathbf{w}(a) - \int_a^b \varphi'(t) \mathbf{w}(t) dt.$$

¹Ovdje $|\cdot|$ označava duljinu vektora. Na lijevoj strani nejednakosti se radi o integralu vektorske funkcije, dok se na desnoj strani radi o određenom integralu.

Primjer 1.3 Ubrzanje materijalne točke zadano je jednadžbom

$$\mathbf{a}(t) = 6t \mathbf{c}_1 + 2 \mathbf{c}_2,$$

gdje su \mathbf{c}_1 i \mathbf{c}_2 konstantni vektori i $t \geq 0$. Želimo naći jednadžbu gibanja te točke uz početne uvjete $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ (u trenutku $t = 0$ točka kreće iz ishodišta iz stanja mirovanja). Kako je brzina $\mathbf{v}(t)$ primitivna funkcija ubrzanja, prema formuli (1.2) za neki konstantan vektor \mathbf{v}_0 vrijedi

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t \mathbf{a}(x) dx + \mathbf{v}_0.$$

Dakle,

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t (6x \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2) dx + \mathbf{v}_0 = \left(6 \frac{x^2}{2} \mathbf{c}_1 + 2x \mathbf{c}_2 \right) \Big|_0^t + \mathbf{v}_0 = 3t^2 \mathbf{c}_1 + 2t \mathbf{c}_2 + \mathbf{v}_0.$$

Iz početnog uvjeta slijedi $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ pa je

$$\mathbf{v}(t) = 3t^2 \mathbf{c}_1 + 2t \mathbf{c}_2.$$

Slično, za neki konstantan vektor \mathbf{s}_0 vrijedi

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(x) dx + \mathbf{s}_0,$$

odnosno

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t (3x^2 \mathbf{c}_1 + 2x \mathbf{c}_2) dx + \mathbf{s}_0 = t^3 \mathbf{c}_1 + t^2 \mathbf{c}_2 + \mathbf{s}_0.$$

Iz početnog uvjeta sada slijedi $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ pa je konačno

$$\mathbf{s}(t) = t^3 \mathbf{c}_1 + t^2 \mathbf{c}_2.$$

1.4 Skalarna i vektorska polja

U ovom poglavlju je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dok sa V_T označavamo skup svih radijus-vektora u sustavu $(T, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Definicija 1.6 i) *Skalarno polje* je svaka funkcija $U : D \rightarrow \mathbb{R}$.

ii) *Vektorsko polje* je svaka funkcija $\mathbf{w} : D \rightarrow V$, gdje je $V = \cup_{T \in D} V_T$ i $\mathbf{w}(T) \in V_T$.

Ako točka T ima u koordinatnom sustavu $S = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ zapis $T = (x, y, z)$, onda je skalarno polje zadano funkcijom tri varijable

$$U(T) = U(x, y, z) = f(x, y, z) : D_S \rightarrow \mathbb{R},$$

pri čemu je D_S opis skupa D u sustavu S . Vektorsko polje zadano je s

$$\mathbf{w}(T) = w_x(x, y, z) \mathbf{i} + w_y(x, y, z) \mathbf{j} + w_z(x, y, z) \mathbf{k},$$

pri čemu se vektor $\mathbf{w}(T)$ nanosi iz točke T .

Ako promijenimo koordinatni sustav, onda se polje naravno ne mijenja, ali se mijenja funkcija f (funkcije w_x , w_y i w_z) s kojima je polje opisano. Osnovna svojstva polja (neprekidnost i diferencijabilnost) ne ovise o izboru koordinatnog sustava.

Radi jednostavnosti često ne pravimo razliku između polja U i funkcije f . Također, često sve prostore radijus-vektora V_T identificiramo s V_0 , odnosno sve radijus-vektore $\mathbf{w}(T)$ nanosimo iz ishodišta.

Definicija 1.7 Skalarno polje U je *neprekidno (diferencijabilno)* ako je njegov predstavnik funkcija $f : D_S \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna (diferencijabilna).

Vektorsko polje \mathbf{w} je *neprekidno (diferencijabilno)* ako su takve sve njegove komponente $w_x, w_y, w_z : D_S \rightarrow \mathbb{R}$.

Primjer 1.4 a) Neka je D slup svih točaka visoke peći i neka je U skalarno polje u kojem $U(T)$ označava temperaturu tvari u točki T u danom trenutku.

b) Izrazom

$$U(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$$

zadano je skalarno polje

$$U : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

koje je neprekidno i diferencijabilno na području definicije.

c) Neka je D skup svih točaka zemljine atmosfere, a \mathbf{w} neka je vektorsko polje koje točki $T \in D$ pridružuje brzinu strujanja zraka $\mathbf{w}(T)$ u toj točki u danom trenutku.

d) Neka je $g(x, y, z)$ iznos gravitacije u točki $T = (x, y, z)$ u sustavu $S = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, gdje je O središte zemlje. Iznos gravitacije se lagano mijenja s obzirom na udaljenost od središta zemlje pa polje g nije konstantno. Nadalje, neka je \mathbf{w} vektorsko polje u istom sustavu zadano s

$$\begin{aligned} w_x(x, y, z) &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ w_y(x, y, z) &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ w_z(x, y, z) &= \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Tada je $g(T) \mathbf{w}(T)$ vektorsko polje gravitacije koje privlači u smjeru središta zemlje za iznos $g(T)$ (vrijedi $|\mathbf{w}(T)| = 1$).

Definicija 1.8 *Nivo-plohe* ili *ekvipotencijalne plohe* skalarnog polja U su plohe za koje je $U(x, y, z) = \text{konst.}$ *Vektorske linije (silnice ili strujnice)* su krivulje sa svojstvom da tangenta krivulje u danoj točki ima smjer vektorskog polja u toj točki.

Na primjer, nivo-plohe u primjeru 1.4 d) su mjesta u zemljinoj atmosferi koja imaju istu gravitaciju, dok su silnice pravci koji prolaze središtem zemlje.

Definicija 1.9 Polje koje ne ovisi o vremenu zove se *stacionarno*. Polje koje ne ovisi o vremenu je *nestacionarno*.

Na primjer, nestacionarna polja dobit ćemo ako u primjeru 1.4 a) i c) promatramo temperaturu odnosno strujanje zraka kroz neki vremenski interval.

1.5 Gradijent, divergencija i rotacija

Funkcije tri varijable imaju parcijalne derivacije i za njih pojam derivacije nije definiran. Stoga se za analizu polja uvode tri operatora koji, svaki u svom području primjene, imaju ulogu sličnu onoj koju ima derivacija funkcije jedne varijable.

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skalarno polje i $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ vektorsko polje pri čemu V_T identificiramo s V_0 za $\forall T \in D$.

Definicija 1.10 *Gradijent* skalarnog polja f je vektorsko polje

$$\text{grad } f : D \rightarrow V_0$$

definirano s

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Divergencija vektorskog polja \mathbf{w} je skalarno polje

$$\text{div } \mathbf{w} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

definirano s

$$\text{div } \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Rotacija vektorskog polja \mathbf{w} je vektorsko polje

$$\text{rot } \mathbf{w} : D \rightarrow V_0$$

definirano s

$$\text{rot } \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Iz definicije gradijenta slijedi da nužan uvjet ekstrema funkcije f možemo pisati kao

$$\text{grad } f = 0.$$

Za razliku od divergencije i rotacije koje imaju smisla samo u slučaju vektorskih polja (tri varijable), gradijent je dobro definiran i za prostore proizvoljne dimenzije n .

Definicija 1.11 *Hamiltonov diferencijalni operator (nabla) glasi*

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Laplaceov diferencijalni operator glasi

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dakle, ∇ istovremeno ima svojstva i vektora i derivacije. Vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (\text{skalarni produkt } \nabla \text{ i } \mathbf{w}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{w} &= \nabla \times \mathbf{w} \quad (\text{vektorski produkt } \nabla \text{ i } \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Iz svojstava množenja vektora skalarom i svojstava skalarnog i vektorskog produkta slijedi da je ∇ linearan operator, odnosno

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla f + \mu \nabla g, \\ \nabla \cdot (\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u}) &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{w} + \mu \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \nabla \times (\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u}) &= \lambda \nabla \times \mathbf{w} + \mu \nabla \times \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

gdje su f, g, \mathbf{u} i \mathbf{w} diferencijabilna polja, a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

U sljedeća tri teorema dat ćemo najvažnija svojstva gradijenta, divergencije i rotacije.

Teorem 1.4 (Svojstva gradijenta) *Neka su f i g diferencijabilna skalarna polja i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

- i) $\operatorname{grad} c = 0, \quad c = \text{const},$
- ii) $\operatorname{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \operatorname{grad} f + \mu \operatorname{grad} g,$
- iii) $\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g,$
- iv) $\operatorname{grad} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}, \quad g \neq 0,$
- v) $\operatorname{grad}(\varphi \circ f) = \frac{d\varphi}{df} \operatorname{grad} f,$ gdje je $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.

Dokaz. Sve tvrdnje se lako dokažu uvrštavanjem. ■

Zadatak 1.3 Dokažite teorem 1.4.

Teorem 1.5 (Svojstva divergencije) *Neka su f, g, \mathbf{u} i \mathbf{w} diferencijabilna polja, a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

- i) $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$ za svako konstantno vektorsko polje $\mathbf{c},$

- ii) $\operatorname{div}(\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{w} + \mu \operatorname{div} \mathbf{u}$,
- iii) $\operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = (\operatorname{rot} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}$,
- iv) $\operatorname{div}(f \mathbf{w}) = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{w} + f \operatorname{div} \mathbf{w}$,
- v) $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \Delta g$,
- vi) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{w}) = 0$.

Dokaz.

- i) Očito.
- ii) Vidi drugu jednadžbu u relaciji (1.3).
- iii) Koristit ćemo formalni račun pomoću operatora ∇ . Kako je ∇ diferencijalni operator, na zadani izraz prvo primjenimo pravilo o derivaciji produkta. Pri tome potcrtavamo polja na koja operator ne djeluje. Dakle,

$$\operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{w} \times \underline{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\underline{\mathbf{w}} \times \mathbf{u}).$$

Sada izraze treba dozvoljenim transformacijama svesti na oblik iz kojeg se jasno vidi kakvo je djelovanje operatora ∇ . U ovom slučaju se radi o mješovitim produktima pa ćemo u prvom slučaju napraviti cikličku, a u drugom acikličku zamjenom i protumačiti konačan rezultat:

$$\operatorname{div}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) - \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{w} - \mathbf{w} \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

- iv) Slično kao u prethodnoj točki, uz korištenje svojstava množenja vektora skalarom, imamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \mathbf{w}) &= \nabla \cdot (f \mathbf{w}) = \nabla \cdot (f \underline{\mathbf{w}}) + \nabla \cdot (\underline{f} \mathbf{w}) \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{w} + f (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{w} + f \operatorname{div} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

- v) Slijedi kada u iv) zamijenimo \mathbf{w} sa $\operatorname{grad} g$ i primjenimo definiciju Laplaceovog operatora 1.11.
- vi) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{w}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) = 0$ jer se radi o mješovitom produktu s dva jednaka vektora. ■

Definirajmo novi diferencijalni operator

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z},$$

čije je djelovanje definirano formulom

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} &= \left(u_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(u_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(u_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Teorem 1.6 (Svojstva rotacije) *Neka su f, g, \mathbf{u} i \mathbf{w} diferencijabilna polja, a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

- i) $\text{rot } \mathbf{c} = \mathbf{0}$ za svako konstantno vektorsko polje \mathbf{c} ,
- ii) $\text{rot}(\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u}) = \lambda \text{rot } \mathbf{w} + \mu \text{rot } \mathbf{u}$,
- iii) $\text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = (\text{div } \mathbf{u}) \mathbf{w} - (\text{div } \mathbf{w}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{u}$,
- iv) $\text{rot}(f \mathbf{w}) = (\text{grad } f) \times \mathbf{w} + f \text{rot } \mathbf{w}$,
- v) $\text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$,
- vi) $\text{rot}(f \text{grad } g) = \text{grad } f \times \text{grad } g$,
- vii) $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{w}) = \text{grad div } \mathbf{w} - \Delta \mathbf{w}$, pri čemu se Δ primjenjuje na svaku komponentu w_x, w_y i w_z .

Dokaz.

- iii) Koristeći svojstva vektorsko-vektorskog produkta [M1, poglavlje 3.12] imamo:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \nabla \times (\mathbf{w} \times \underline{\mathbf{u}}) + \nabla \times (\underline{\mathbf{w}} \times \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{w} (\nabla \cdot \underline{\mathbf{u}}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{w} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \underline{\mathbf{w}}) \\ &= \mathbf{w} \text{div } \mathbf{u} - \mathbf{u} \text{div } \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

- iv) Vrijedi

$$\begin{aligned} \text{rot}(f \mathbf{w}) &= \nabla \times (f \mathbf{w}) = \nabla \times (f \underline{\mathbf{w}}) + \nabla \times (\underline{f} \mathbf{w}) \\ &= (\nabla f) \times \mathbf{w} + f (\nabla \times \mathbf{w}) = (\text{grad } f) \times \mathbf{w} + f \text{rot } \mathbf{w}. \end{aligned}$$

- v) $\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ jer se radi o vektorskom produktu dva kolinearna vektora.

- vi) Vrijedi

$$\begin{aligned} \text{rot}(f \text{grad } g) &= \nabla \times (f \nabla g) = \nabla \times (f \underline{\nabla} g) + \nabla \times (\underline{f} \nabla g) \\ &= (\nabla f) \times (\nabla g) + f (\nabla \times (\nabla g)) = \text{grad } f \times \text{grad } g. \end{aligned}$$

■

1.6 Potencijalna i solenoidalna polja

Definicija 1.12 Vektorsko polje $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ je *potencijalno* ili *konzervativno* ako postoji skalarno polje $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da je²

$$\mathbf{w} = -\text{grad } f.$$

Polje f je *potencijal* polja \mathbf{w} . Polje \mathbf{w} je *bezvrtložno* ako je

$$\text{rot } \mathbf{w} = \mathbf{0},$$

a *solenoidalno* ako je

$$\text{div } \mathbf{w} = 0.$$

²Ponekad se u definiciji potencijalnog polja umjesto $\mathbf{w} = -\text{grad } f$ stavlja $\mathbf{w} = \text{grad } f$.

Primjer 1.5 a) Ako točke rotira oko čvrste osi brzinom \mathbf{w} , onda je $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{w}$ kutna brzina te točke. Stoga $\operatorname{rot} \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ znači postojanje nekog vrtložnog gibanja.

b) Gravitacijsko polje materijalne točke M mase m definirano s

$$\mathbf{G} = K \frac{m}{r^2} \mathbf{r}_0,$$

gdje je

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

je potencijalno polje s potencijalom

$$U = -K \frac{m}{r}.$$

c) Solenoidalno polje je ono u kojem nema divergencije niti u jednoj točki. Za razjašnjenje ovog koncepta potrebno je razmatrati ne samo pojedinu točku, već i njenu okolinu. $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ znači da u svakoj maloj okolini neke točke količina promatrane vrijednosti uvijek ostaje konstanta (koliko uđe u okolinu, toliko izađe). Važan primjer su polja gibanja nestlačivih tekućina (voda) - ukoliko nemamo slučaj da se kemijskom reakcijom negdje generira nova masa, svako polje gibanje takve tekućine bit će solenoidalno.

Imamo sljedeći važan teorem.

Teorem 1.7 *Neka je $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ diferencijabilno vektorsko polje, neka je skup $D \subseteq \mathbb{R}^3$ konveksan i neka je $K \subseteq D$ otvoreni kvadar. Tada vrijedi:*

i) *Polje \mathbf{w} je potencijalno na D ako i samo ako je bezvrtložno na D , odnosno*

$$(\exists f : D \rightarrow \mathbb{R}) \quad \mathbf{w} = -\operatorname{grad} f \quad \iff \quad \operatorname{rot} \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

ii) *Polje \mathbf{w} je solenoidalno na kvadru K ako i samo ako postoji dva puta diferencijabilno polje $\mathbf{u} : K \rightarrow V_0$ takvo da je \mathbf{w} rotacija od \mathbf{u} , odnosno*

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \iff \quad (\exists \mathbf{u} : K \rightarrow V_0) \quad \mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

Dokaz.

- i) Potencijalno polje je uvijek bezvrtložno prema teoremu 1.6 v). Dokaz obrata preskačemo.
- ii) Dva puta diferencijabilno polje koje je nastalo kao rotacija nekog polja je uvijek solenoidalno prema teoremu 1.5 vi). Dokaz obrata preskačemo. ■

1.7 Usmjerene derivacije

Neka su zadani skup $D \in \mathbb{R}^3$, točka $T_0 \in D$ i vektor \mathbf{a} s hvatištem u točki T_0 . Neka je

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

jedinični vektor vektora \mathbf{a} [M1, poglavlje 3.6]. Neka točka T leži na zruci određenoj vektorom \mathbf{a} i neka je

$$\overrightarrow{T_0T} = t\mathbf{a}, \quad t \geq 0.$$

Uz ovakvu definiciju parametra t očito vrijedi $d(T_0, T) = t$.

Definicija 1.13 *Derivacija skalarnog polja $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ u točki T_0 u smjeru vektora \mathbf{a} je broj*

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(T) - U(T_0)}{t}.$$

Derivacija vektorskog polja $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ u točki T_0 u smjeru vektora \mathbf{a} je vektor

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{w}(T) - \mathbf{w}(T_0)}{t}.$$

Sljedeći teorem daje jednostavne formule za računanje usmjerenih derivacija.

Teorem 1.8 *Vrijedi*

$$\frac{\partial U(T)}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a}_0 \cdot \text{grad } U(T),$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}(T)}{\partial \mathbf{a}} = (\mathbf{a}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w}(T).$$

Dokaz. Dokažimo prvu tvrdnju teorema. Neka u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ vrijedi $T = (x, y, z)$, $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $U(T) = U(x, y, z)$. Tada jednakost

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_0} + \overrightarrow{T_0T}$$

zapisujemo kao

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t\mathbf{a}_0 \\ &= (x_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (y_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (z_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Dakle, za svaku točku T na zruci određenoj točkom T_0 i vektorom \mathbf{a} vrijedi

$$x = x_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{i}, \quad y = y_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{j}, \quad z = z_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k}.$$

Stoga je limes iz definicije 1.13 u stvari jednak derivaciji funkcije jedne varijable

$$g(t) = f(x_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{i}, y_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{j}, z_0 + t\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k})$$

u točki $t = 0$. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(T)}{\partial \mathbf{a}}(T_0) &= \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{k} \right) (T_0) \\ &= \mathbf{a}_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(T_0) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(T_0) \mathbf{k} \right) \\ &= \mathbf{a}_0 \cdot \text{grad } U(T_0). \end{aligned}$$

■

Primjer 1.6 Neka je zadano

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + 3yz + 5, \\ \mathbf{w} &= yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \\ T &= (1, -1/2, 2). \end{aligned}$$

Derivacija skalarnog polja f u smjeru vektora \mathbf{a} glasi

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a}_0 \cdot \text{grad } f = \left(\frac{2}{3} \mathbf{i} + \frac{1}{3} \mathbf{j} - \frac{2}{3} \mathbf{k} \right) \cdot (2x \mathbf{i} + 3z \mathbf{j} + 3y \mathbf{k}) = \frac{4}{3}x + z - 2y,$$

pa u točki T imamo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \left(1, -\frac{1}{2}, 2 \right) = \frac{13}{3}.$$

Derivacija vektorskog polja \mathbf{w} u smjeru vektora \mathbf{a} glasi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}} &= (\mathbf{a}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}) \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{3} (z - 2y) \mathbf{i} + \frac{2}{3} (z - x) \mathbf{j} + \frac{1}{3} (2y - x) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

pa u točki T imamo

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{a}} \left(1, -\frac{1}{2}, 2 \right) = \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j}.$$

Napomena 1.3 Prema teoremu 1.8 funkcija (skalarno polje) U u danoj točki najbrže raste u smjeru $\text{grad } U$. Naime, izraz [M1, poglavlje 3.9]

$$\mathbf{a}_0 \cdot \text{grad } U = |\mathbf{a}_0| |\text{grad } U| \cos \angle(\mathbf{a}_0, \text{grad } U),$$

poprima najveću vrijednost $|\text{grad } U|$ u kada je $\mathbf{a}_0 = (\text{grad } U)_0$ jer je tada

$$\cos \angle(\mathbf{a}_0, \text{grad } U) = \cos \angle((\text{grad } U)_0, \text{grad } U) = 1.$$

Slično razmatranje pokazuje da u danoj točki skalarno polje U najbrže pada u smjeru $-\text{grad } U$ jer je onda $\cos \angle(\mathbf{a}_0, \text{grad } U) = -1$.

Napomena 1.4 Vektor normale na nivo-plohu [M2, poglavlje 3.1] funkcije $U(x, y, z)$ u točki T_0 dan je s

$$\mathbf{n}_0 = [\text{grad } U(T_0)]_0.$$

Naime, jednadžba nivo-plohe u kojoj sve točke imaju vrijednost funkcije jednaku $U(T_0)$ je $U(x, y, z) = U(T_0)$. Neka je

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}.$$

Funkcije U je na nivo-plohi konstantna pa vrijedi

$$0 = dU(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \text{grad } U(T_0) \cdot d\mathbf{r}.$$

No, pošto smo se ograničili na nivo-plohu, $d\mathbf{r}$ je infinitezimalni pomak po tangencijalnoj ravnini te plohe u točki T_0 . Prema prethodnoj jednakosti $\text{grad } U(T_0)$ je okomit na $d\mathbf{r}$ pa je stoga kolinearan s vektorom normale, odnosno

$$\text{grad } U(T_0) = \lambda \mathbf{n}_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Poglavlje 2

KRIVULJNI INTEGRALI

2.1	Glatka krivulja	17
2.2	Krivuljni integral skalarnog polja	19
2.3	Krivuljni integral vektorskog polja	22
2.3.1	Cirkulacija	24
2.4	Potencijal	26
2.5	Greenova formula	28

2.1 Glatka krivulja

Skup točaka $C \in \mathbb{R}^3$ je *jednostavna*¹ *glatka krivulja* ako:

i) postoji neprekidna injekcija

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad [a, b] \subseteq \mathbb{R},$$

za koju vrijedi

$$C = \{r(t) : t \in [a, b]\},$$

ii) postoji neprekidna derivacija \mathbf{r}' i

$$\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Drugim riječima, krivulja C je hodograf vektorske funkcije $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OM}$, gdje je $r(t) = M$.

Par $([a, b], r)$ je *glatka parametrizacija* krivulje C . Krivulja može imati više parametrizacija.

Točke $A = r(a)$ i $B = r(b)$ su *rubovi* (*početak* i *kraj*) krivulje C . Ako je $B = A$, onda je krivulja *zatvorena*.

Injektivnost funkcije r povlači jednostavnost krivulje C – ako je r injekcija, onda C ne presijeca samu sebe.

¹Krivulja ne presijeca samu sebe.

Neprekidnosti derivacije \mathbf{r}' povlači glatkoću krivulje C , kao i to da u svakoj točki krivulja ima tangentu s vektorom smjera $\mathbf{r}(t)$.

Označimo li u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koordinate točke $r(t)$ s

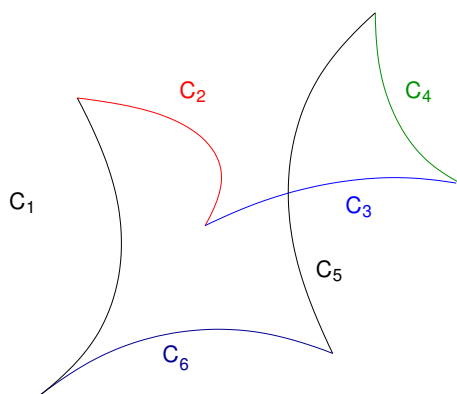
$$x(t) = \varphi(t), \quad y(t) = \psi(t), \quad z(t) = \xi(t),$$

dobili smo *parametarske jednadžbe* krivulje C . Jednadžba

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \xi(t)\mathbf{k}$$

je *vektorska parametarska jednadžba* krivulje C .

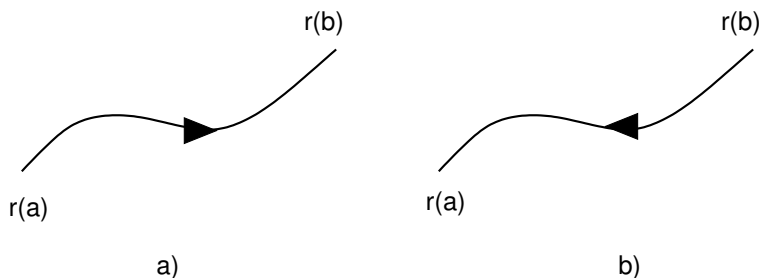
Skup C je *po djelovima glatka krivulja* ako se može dobiti povezivanjem konačno mnogo jednostavnih glatkih krivulja C_1, C_2, \dots, C_k , pri čemu svaki par tih krivulja može imati najviše konačno zajedničkih točaka (vidi sliku 2.1).



Slika 2.1. Po djelovima glatka krivulja

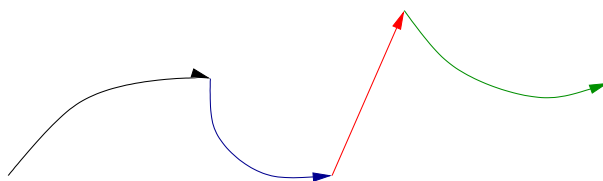
Krivulja C ima dvije *neprekidne orijentacije*:

- u smislu *rasta* parametra t , odnosno gibamo se od točke $A = r(a)$ do točke $B = r(b)$ (slika 2.2 a)), i
- u smislu *pada* parametra t , odnosno gibamo se od točke $B = r(b)$ do točke $A = r(a)$ (slika 2.2 b)).



Slika 2.2. Neprekidne orijentacije krivulje

Ovdje treba biti oprezan jer orijentacija u smislu rasta parametra t može biti jednaka orijentaciji u smislu pada nekog drugog parametra t' .



Slika 2.3. Orijentacija po djelovima glatke krivulje

Po djelovima glatku krivulju orijentiramo tako da njene sastavne djelove orijentiramo suglasno (slika 2.3).

Ako je C ravninska krivulja, onda je *negativna orijentacija* u smjeru gibanja kazaljke na satu, a *pozitivna orijentacija* obratno od gibanja kazaljke na satu.

2.2 Krivuljni integral skalarnog polja

Definicija 2.1 Neka je f skalarno polje, a C glatka krivulja

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j} + \xi(t) \mathbf{k}, \quad t \in [a, b].$$

Ako je funkcija $(f \circ (\varphi, \psi, \xi)) |\mathbf{r}'|$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, onda određeni integral

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b (f \circ (\varphi, \psi, \xi))(t) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\xi'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

zovemo *krivuljni integral skalarnog polja f (prve vrste) po glatkoj krivulji C* .

Izraz

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\xi'(t)]^2} dt$$

jednak je elementu duljine luka (usporedi s [M2, poglavlje 2.6.2]).

Krivuljni integral prve vrste po po djelovima glatkoj krivulji definiramo kao

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \cdots + \int_{C_k} f ds.$$

Ako je f linearna gustoća krivulje C , onda $\int_C f ds$ daje *masu* krivulje. Ako stavimo $f = 1$, onda $\int_C ds$ daje *duljinu* krivulje.

Bez dokaza navodimo sljedeće tvrdnje:

- i) krivuljni integral skalarnog polja ne ovisi ni o parametrizaciji niti o orijentaciji krivulje,

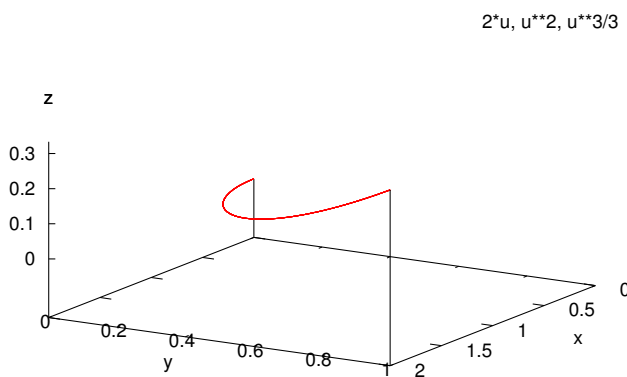
ii) krivuljni integral skalarnog polja je linearan, odnosno

$$\int_C (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_C f ds + \mu \int_C g ds.$$

Primjer 2.1 Izračunajmo krivuljni integral skalarnog polja $f(x, y, z) = x + z$ po luku krivulje C zadane s

$$x = 2t, \quad y = t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Krivulja je prikazana na slici 2.4.



Slika 2.4. Luk krivulje C

Vrijedi $A = r(0) = (0, 0, 0)$ i $B = r(1) = (2, 1, 1/3)$ te imamo

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^1 \left(2t + \frac{1}{3}t^3 \right) \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} dt \\ &= \int_0^1 \left(2t + \frac{1}{3}t^3 \right) (2 + t^2) dt = \frac{t^2(t^2 + 6)^2}{18} \Big|_0^1 = \frac{49}{18}. \end{aligned}$$

Ako je krivulja C zadana kao presjek dvaju ploha, $G(x, y, z) = 0$ i $H(x, y, z) = 0$, koje ispunjavaju uvjete teorema o implicitnoj funkciji [M2, teorem 3.9], onda nakon eliminacije krivulju C možemo prikazati kao presjek dvaju novih ploha,

$$y = g(x), \quad z = h(x), \quad x \in [a, b],$$

pri čemu su funkcije g i h neprekidno derivabilne na intervalu $[a, b]$. Tada je

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x, g(x), h(x)) \sqrt{1 + g'^2(x) + h'^2(x)} dx,$$

odnosno, radi se o posebnoj parametrizaciji

$$x = t, \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in [a, b].$$

Ako je C ravninska krivulja zadana s

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j}, \quad t \in [a, b],$$

onda je

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Posebno, ako je ravninska krivulja C zadana s

$$y = g(x), \quad x \in [a, b],$$

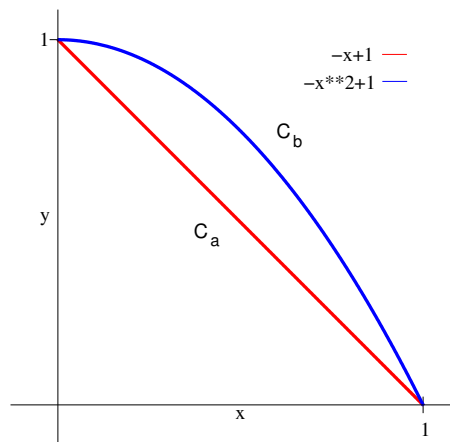
onda je

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'^2(x)} dx.$$

Primjer 2.2 Izračunajmo krivuljni integral skalarnog polja $f(x, y) = xy$ po luku krivulje C zadane s (slika 2.5)

a) $C_a \dots y = -x + 1, \quad x \in [0, 1],$

b) $C_b \dots y = -x^2 + 1, \quad x \in [0, 1].$



Slika 2.5. Ravninske krivulje

Za krivulju C_a imamo

$$\int_{C_a} f(x, y) ds = \int_0^1 x(-x+1) \sqrt{1+(-1)^2} dx = \sqrt{2} \int_0^1 (-x^2+x) dx = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

dok za krivulju C_b imamo

$$\int_{C_b} f(x, y) ds = \int_0^1 x(-x^2+1) \sqrt{1+(-2x)^2} dx = \dots = \frac{25\sqrt{5}-11}{120}.$$

2.3 Krivuljni integral vektorskog polja

Definicija 2.2 Neka je $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ vektorsko polje i \vec{C} orijentirana glatka krivulja u području D ,

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \xi(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b].$$

Ako je funkcija $\mathbf{w}(\varphi, \psi, \xi) \cdot \mathbf{r}'$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, onda određeni integral

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{w} \cdot [\mathbf{r}']_0 ds = \int_a^b \mathbf{w}(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

zovemo *krivuljni integral vektorskog polja \mathbf{w} (druge vrste) po glatkoj krivulji \vec{C} od točke $A = \mathbf{r}(a)$ do točke $B = \mathbf{r}(b)$.*

Jednakosti u prethodnoj formuli slijede iz relacije

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) dt = |\mathbf{r}'(t)| [\mathbf{r}'(t)]_0 dt = [\mathbf{r}'(t)]_0 ds.$$

Krivuljni integral vektorskog polja računa se po formuli

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [w_x(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \varphi'(t) + w_y(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \psi'(t) + w_z(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \xi'(t)] dt.$$

Krivuljni integral druge vrste po po djelovima glatkoj krivulji definiramo kao

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\vec{C}_1} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\vec{C}_2} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{\vec{C}_k} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r},$$

pri čemu svi djelovi krivulje \vec{C} moraju biti suglasno orijentirani.

Krivuljni integral vektorskog polja možemo interpretirati kao *rad* sile $\mathbf{F} = \mathbf{w}$ uzduž puta $s = \vec{C}$ od točke A do točke B .

Vrijede sljedeće tvrdnje:

- i) krivuljni integral vektorskog polja ne ovisi o parametrizaciji krivulje, ali ovisi orijentaciji krivulje – kako u jednom smjeru energiju dobivamo, a u drugom je trošimo, vrijedi

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\overleftarrow{\vec{C}}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r},$$

- ii) krivuljni integral vektorskog polja je linearan, odnosno

$$\int_{\vec{C}} (\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_{\vec{C}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}.$$

Primjer 2.3 Krivuljni integral vektorskog polja

$$\mathbf{w} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

po krivulji \vec{C} zadanoj s

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

jednak je

$$\begin{aligned} \int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} [(2 \sin t - 3t)(-2 \sin t) + (3t - 2 \cos t) 2 \cos t \\ &\quad + (2 \cos t - 2 \sin t)(3)] dt = \dots = -20\pi. \end{aligned}$$

Uvedimo nove oznake,

$$w_x = P, \quad w_y = Q, \quad w_z = R, \quad P, Q, R : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

Uz ove oznake je

$$\mathbf{w} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Osim toga vrijedi

$$\varphi'(t) dt = dx, \quad \psi'(t) dt = dy, \quad \xi'(t) dt = dz,$$

pa možemo pisati

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\vec{C}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Ukoliko s

$$\omega(\mathbf{w}) = w_x dx + w_y dy + w_z dz = P dx + Q dy + R dz$$

označimo diferencijalnu formu pridruženu polju \mathbf{w} , onda zapisujemo

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\vec{C}} \omega(\mathbf{w}).$$

Ako je krivulja \vec{C} zadana kao presjek dvaju ploha (vidi poglavlje 2.2), onda je

$$\begin{aligned} \int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\vec{C}} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{\vec{C}} P(x, g(x), h(x)) dx + Q(x, g(x), h(x)) g'(x) dx + R(x, g(x), h(x)) h'(x) dx. \end{aligned}$$

U slučaju ravninskog polja

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} = P dx + Q dy$$

i glatke krivulje \vec{C} zadane s

$$y = g(x), \quad a \leq x \leq b,$$

imamo

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\vec{C}} P dx + Q dy = \int_{\vec{C}} P(x, g(x)) dx + Q(x, g(x)) g'(x) dx.$$

Primjer 2.4 Izračunajmo

$$I = \int_{\vec{C}} P dx + Q dy + R dz,$$

gdje je

$$P(x, y, z) = y + z, \quad Q(x, y, z) = z + x, \quad R(x, y, z) = x + y,$$

a \vec{C} orijentirana dužina od ishodišta do točke $M = (1, 2, 3)$. Krivulju možemo protumačiti kao presjek ravnina

$$y = 2x, \quad z = 3x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

pa je

$$I = \int_0^1 (2x + 3x) dx + (3x + x) \cdot 2 dx + (x + 2x) \cdot 3 dx = 11.$$

2.3.1 Cirkulacija

Definicija 2.3 Krivuljni integral vektorskog polja po zatvorenoj po djelovima glatkoj krivulji \vec{C} zove se *cirkulacija* vektorskog polja i označava se sa

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{w} d\mathbf{r}.$$

Primjer 2.5 Izračunajmo cirkulaciju ravninskog vektorskog polja $\mathbf{w} = x \mathbf{i} + x y \mathbf{j}$ po

- središnjoj kružnici radijusa a proizvoljne orijentacije,
- rubu trokuta $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$, $B = (1, 1)$ orijentiranom u pozitivnom smislu.

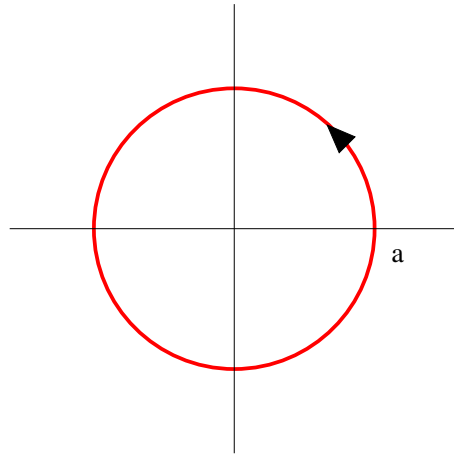
Kružnica iz točke a) prikazana je na slici 2.6.

Jedna parametrizacija kružnice glasi

$$\vec{C} \dots \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

pa vrijedi

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{w} d\mathbf{r} = \oint_{\vec{C}} x dx + x y dy = \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot a (-\sin t) + a^2 \cos t \sin t \cdot a \cos t) dt$$



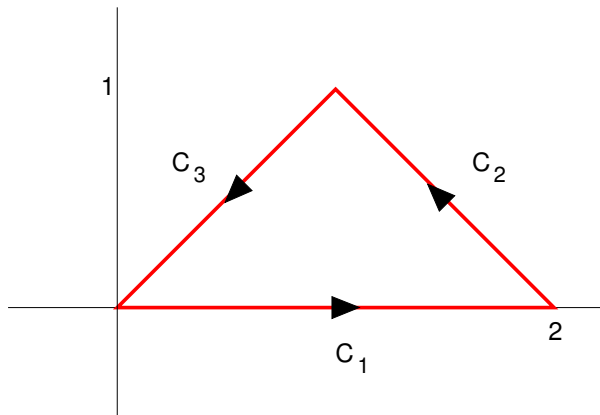
Slika 2.6. Pozitivno orijentirana kružnica

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-a^2 \cos t \sin t + a^3 \cos^2 t \sin t) dt = \dots = 0.$$

Za kružnicu orijentiranu u negativnom smislu zbog promjene orijentacije vrijedi

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{w} \, d\mathbf{r} = - \oint_{\vec{C}} \mathbf{w} \, d\mathbf{r} = -0 = 0.$$

Trokut iz točke b) prikazan je na slici 2.7.



Slika 2.7. Pozitivno orijentirani trokut

Glatke dijelove krivulje \vec{C} parametriziramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &\dots y = 0, & x \in [0, 2], \\ \vec{C}_2 &\dots y = -x + 2, & x \in [2, 1] \text{ (u smislu pada parametra } t), \\ \vec{C}_3 &\dots y = x, & x \in [1, 0] \text{ (u smislu pada parametra } t). \end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{C}} \mathbf{w} \, d\mathbf{r} &= \oint_{\vec{C}_1} \mathbf{w} \, d\mathbf{r} + \oint_{\vec{C}_2} \mathbf{w} \, d\mathbf{r} + \oint_{\vec{C}_3} \mathbf{w} \, d\mathbf{r} \\ &= \int_0^2 (x + x \cdot 0 \cdot 0) \, dx + \int_2^1 (x + x(-x + 2) \cdot (-1)) \, dx + \int_1^0 (x + x \cdot x \cdot 1) \, dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2.4 Potencijal

Teorem 2.1 *Krivuljni integral vektorskog polja $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ ne ovisi o putu integracije već samo o početnoj i krajnjoj točki ako i samo ako je \mathbf{w} potencijalno polje.*

Dokaz. Dokažimo jedan smjer teorema. Neka je \mathbf{w} potencijalno polje s potencijalom U , $\mathbf{w} = -\text{grad } U$. Uz parametrizaciju krivulje

$$x(t) = \varphi(t), \quad y(t) = \psi(t), \quad z(t) = \xi(t), \quad t \in [a, b],$$

krivuljni integral vektorskog polja postaje integral totalnog diferencijala, odnosno vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\vec{C}} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= - \int_a^b \frac{\partial U}{\partial \varphi} \varphi'(t) dt + \frac{\partial U}{\partial \psi} \psi'(t) dt + \frac{\partial U}{\partial \xi} \xi'(t) dt = \int_b^a d[U(\varphi(t), \psi(t), \xi(t))] \\ &= U(\varphi(a), \psi(a), \xi(a)) - U(\varphi(b), \psi(b), \xi(b)) = U(A) - U(B) \end{aligned}$$

pri čemu su $A = (\varphi(a), \psi(a), \xi(a))$ i $B = (\varphi(b), \psi(b), \xi(b))$ početna i krajnja točka zadane krivulje. ■

Iz teorema 2.1 zaključujemo da za cirkulaciju potencijalnog polja uvijek vrijedi

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = U(A) - U(A) = 0.$$

No, vrijedi i obrat koji nam daje još jednu karakterizaciju potencijalnih polja (pored one iz teorema 1.7): na konveksnom skupu D vrijedi

$$\mathbf{w} = -\text{grad } f \iff \text{rot } \mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \oint_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \forall \vec{C}.$$

Opišimo kako se nalazi potencijal potencijalnog polja. Iz dokaza teorema 2.1 vidimo da je potencijal polja

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

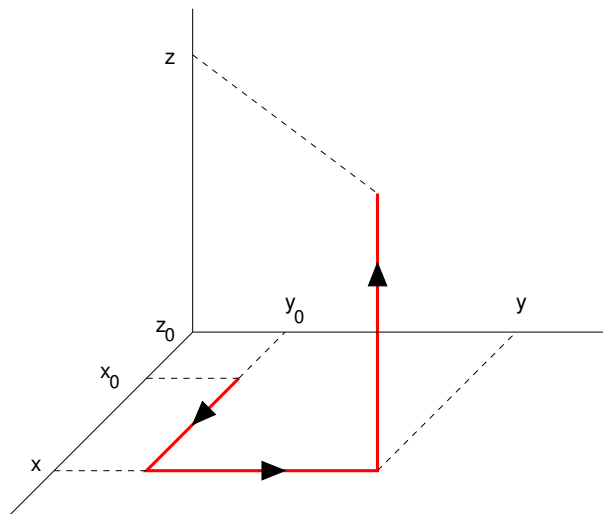
integral totalnog diferencijala,

$$U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = - \int_{\vec{C}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

za svaku krivulju $\vec{C} = \overrightarrow{T_0 T}$ između točaka $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $T = (x, y, z)$. Za krivulju \vec{C} biramo put uzduž koordinatnih osiju koji je najlakši za integraciju (vidi sliku 2.8) što daje

$$U(x, y, z) = - \int_{x_0}^x w_x(t, y_0, z_0) dt - \int_{y_0}^y w_y(x, u, z_0) du - \int_{z_0}^z w_z(x, y, v) dv + C.$$

U prethodnoj formuli smo iskoristili činjenicu da je potencijal U zadan do n konstantu jer je grad $C = \mathbf{0}$ za svako konstantno polje C . u praktičnom računanju se za točku T_0 najčešće uzima ishodište. Uočite formule za računanje potencijala s formulom za računanje antiderivacije $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ iz [M2, teorem 2.3].



Slika 2.8. Put integracije uzduž koordinatnih osiju

Primjer 2.6 Izračunajmo $\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ gdje je

$$\mathbf{w} = (3x^2yz + y + 5)\mathbf{i} + (x^3z + x - z)\mathbf{j} + (x^3y - y - 7)\mathbf{k},$$

i

a) \vec{C} je luk bilo koje parabole od ishodišta do točke $T = (1, 1, 1)$, ili

b) \vec{C} je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$, $z = b$.

Polje \mathbf{w} je bezvrtložno jer je

$$\text{rot } \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Kako je polje \mathbf{w} bezvrtložno na konveksnom skupu \mathbb{R}^3 , to je po teoremu 1.7 polje \mathbf{w} također i potencijalno, a po teoremu 2.1 integral polja \mathbf{w} ne ovisi o putu integracije. Potencijal polja \mathbf{w} jednak je

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= - \int_0^x (3t^2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 + 5) dt - \int_0^y (x^3 \cdot 0 + x - 0) du - \int_0^z (x^3 y - y - 7) dv \\ &= -5x - xy - x^3 y z + yz + 7z \end{aligned}$$

pa je

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = U(0, 0, 0) - U(1, 1, 1) = -1.$$

U zadatku b) radi se o cirkulaciji potencijalnog polja pa je $\oint_{\vec{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = 0$ bez obzira na parametre a i b i orijentaciju krivulje.

2.5 Greenova formula

Sljedeći teorem je poopćenje Newton-Leibnitzove formule [M2, poglavlje 2.2] na dvodimenzionalni slučaj.

Teorem 2.2 (Green) *Neka su*

$$P, Q : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

dvije diferencijabilne funkcije, pri čemu je \mathcal{S} otvoren skup (bez ruba). Neka je $\vec{C} \subseteq \mathcal{D}$ pozitivno orijentirana po djelovima glatka krivulja i neka je D unija krivulje \vec{C} i unurašnjeg područja kojeg ta krivulja omeđuje (vidi sliku 2.9). Tada je

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\vec{C}} P dx + Q dy.$$

Greenov teorem vrijedi i u području s "rupama" (slika 2.10), pri čemu sve krivulje \vec{C}_i moraju biti negativno orijentirane:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\vec{C}} P dx + Q dy + \sum_{i=1}^k \oint_{\vec{C}_i} P dx + Q dy.$$

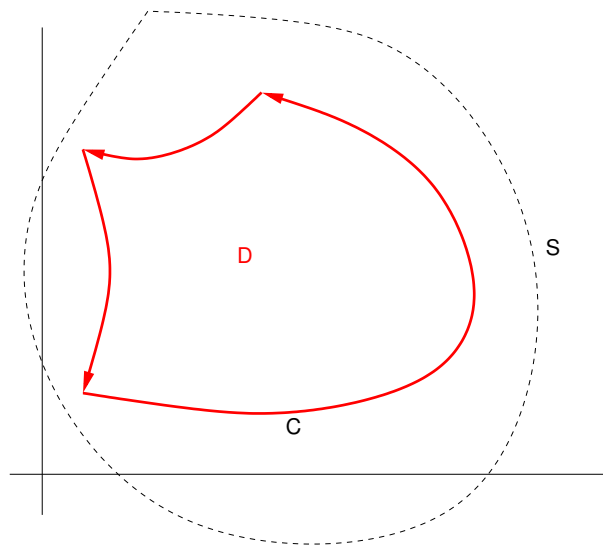
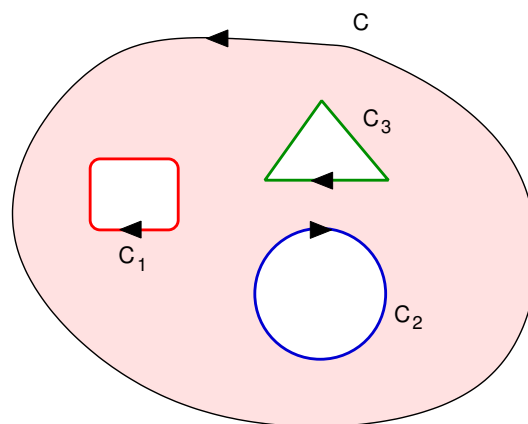
Primjer 2.7 Izračunajmo

$$\oint_{\vec{C}} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy,$$

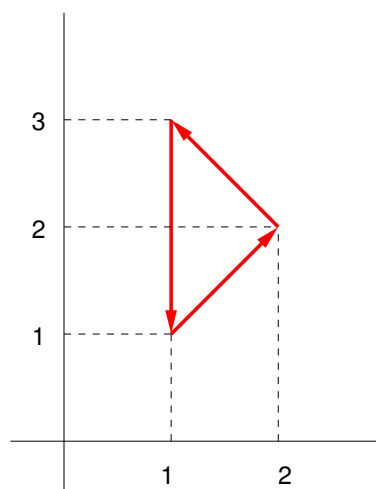
gdje je \vec{C} rub trokuta s vrhovima $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ i $C = (1, 3)$ (slika 2.11).

Prema Greenovom teoremu vrijedi

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_1^2 \int_x^{-x+4} (2(x+y) - 4y) dy dx = -\frac{4}{3}.$$

Slika 2.9. Zatvoreni skup D 

Slika 2.10. Područje s više zatvorenih krivulja



Slika 2.11. Primjena Greenovog teorema

Zadatak 2.1 Izračunajte cirkulaciju iz primjera 2.7 bez primjene Greenovog teorema.

Korolar 2.1 *Ako su ispunjeni uvjeti Greenovog teorema, onda je površina područja D dana s*

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint_{\vec{C}} -y dx + x dy.$$

Dokaz. Korolar slijedi direktno iz Greenovog teorema. ■

Greenovu formulu možemo još pisati i kao

$$\oint_{\vec{C}} P dx + Q dy = \oint \mathbf{w} d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot } \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} dx dy.$$

Poglavlje 3

PLOŠNI INTEGRALI

3.1	Glatka ploha	31
3.2	Plošni integral skalarnog polja	36
3.3	Plošni integral vektorskog polja	38
3.4	Teoremi o divergenciji, gradijentu i rotoru	44
3.5	Stokesova formula	46

Integriranje po plohama je jedno od osnovnih oruđa matematičke fizike.

3.1 Glatka ploha

Definicija 3.1 Skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploha* ako za svaku točku $T_0 \in S$ postoji otvorena okolina te točke V , otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna funkcija $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ i (pravokutni) koordinatni sustav $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ u \mathbb{R}^3 takvi da je u tom sustavu

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in U,$$

jednadžba skupa $V \cap S$.

Ploha S je *glatka u točki* T_0 ako je funkcija g diferencijabilna u točki (x_0, y_0) , pri čemu je $z_0 = g(x_0, y_0)$ i $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Ploha S je *glatka ploha* ako je glatka u svakoj točki.

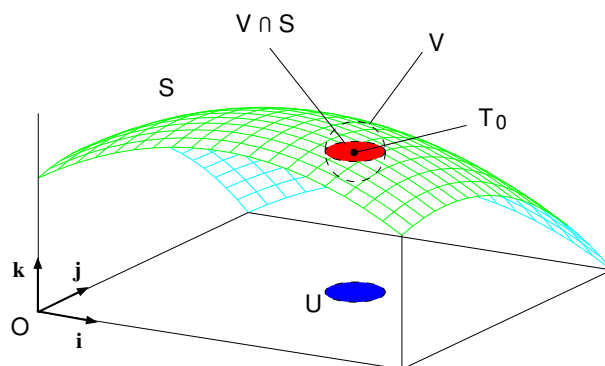
Parametrizacija plohe iz definicije 3.1 prikazana je na slici 3.1.

Važno je primjetiti da ne mora za svaku točku na plohi biti zadan isti sustav. Tako je, na primjer, na slici 3.2 za točku T_0 funkcija g zadana u sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dok je za točku T_1 funkcija g zadana u sustavu $(O, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

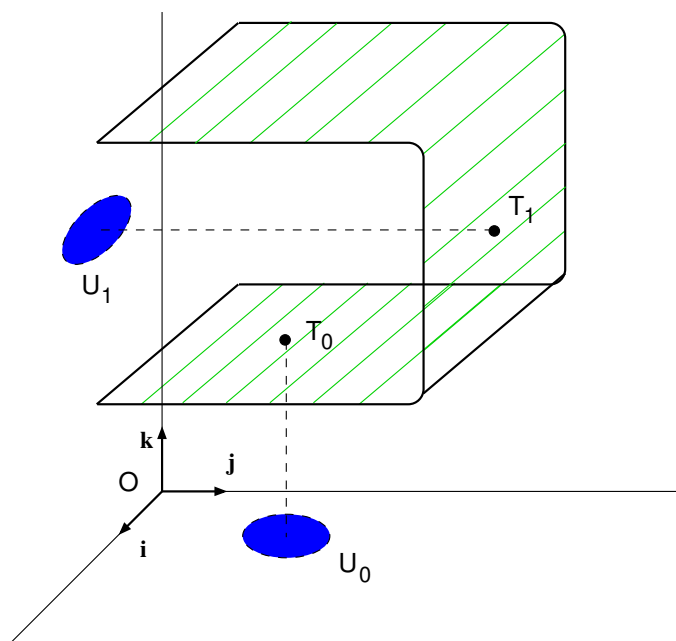
Plohe možemo zadati na razne načine. Ako je čitava ploha S zadana jednom funkcijom $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, kažemo da je

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

eksplicitna jednadžba plohe.



Slika 3.1. Parametrizacija plohe



Slika 3.2. Ploha parametrizirana s dva sustava

Na primjer, za $D = \mathbb{R}^2$ i $g(x, y) = x^2 - y^2$ je $z = x^2 - y^2$ implicitna jednadžba hiperboličkog paraboloida (vidi [M2, poglavlje 3.4.2]).

Ako je skup $D \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren i ako je funkcija $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna te je $\text{grad } G(T) \neq \mathbf{0}$ za svaku točku $T \in D$, onda je

$$G(x, y, z) = 0$$

implicitna jednadžba plohe

$$S = \{(x, y, z) \in D \mid G(x, y, z) = 0\}.$$

Ploha S je očito glatka, a normala tangencijalne ravnine u točki T dana je vektorom $\text{grad } G(T)$ (vidi napomenu 1.4).

Na primjer, za $D = \mathbb{R}^3$ i $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implicitna jednadžba plašta jedinične kugle. Očito je

$$\text{grad } G(T) = 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

u svakoj točki T koja se nalazi na plohi.

Plohu možemo zadati i *parametarski*:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \xi(u, v), \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Na primjer, eksplicitno zadana ploha je specijalan slučaj parametarski zadane plohe uz

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v).$$

Parametarsko zadavanje ploha je najuniverzalniji način zadavanja ploha. Tako, na primjer, *elipsoid* zadajemo s [M2, poglavlje 3.4]

$$\begin{aligned} x &= 6 \cos u \cos v, \\ y &= 4 \sin u \cos v, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-\pi/2, \pi/2], \\ z &= 2 \sin v, \end{aligned}$$

torus zadajemo s

$$\begin{aligned} x &= (1 - 0.2 \cos v) \cos u, \\ y &= (1 - 0.2 \cos v) \sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi], \\ z &= 0.2 \sin v, \end{aligned}$$

heksagon zadajemo s

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 v \cos^3 u, \\ y &= \sin^3 v \cos^3 u, \quad u \in [-1.3, 1.3], \quad v \in [0, 2\pi], \\ z &= \sin^3 u, \end{aligned}$$

a *školjku* zadajemo s

$$\begin{aligned} x &= u \cos u \left(1 + \frac{\cos v}{2}\right), \quad u, v \in [0, 2\pi], \\ y &= \frac{u}{2} \sin v, \\ z &= u \sin u \left(1 + \frac{\cos v}{2}\right). \end{aligned}$$

Zadatak 3.1 Nacrtajte elipsoid, torus, heksagon i školjku pomoću programa NetPlot koristeći redom izraze

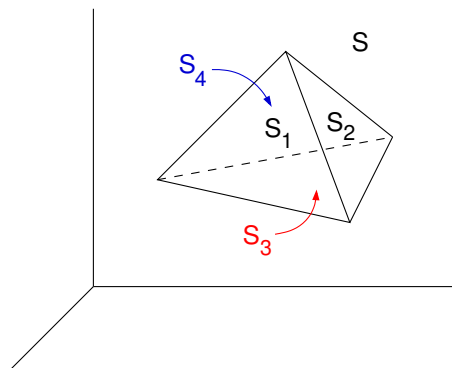
```
6*cos(u)*cos(v), 4*sin(u)*cos(v), 2*sin(v)
(1-0.2*cos(v))*cos(u), (1-0.2*cos(v))*sin(u), 0.2*sin(v)
cos(v)**3*cos(u)**3, sin(v)**3*cos(u)**3, sin(u)**3
cos(u)*u*(1+cos(v)/2), sin(v)*u/2, sin(u)*u*(1+cos(v)/2)
```

Pri tome za svaku plohu odaberite odgovarajuće granice za parametre u i v .

Parametarsku vektorsku jednadžbu plohe S dobijemo kada plohu zadamo kao hodograf vektorske funkcije:

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v) \mathbf{i} + \psi(u, v) \mathbf{j} + \xi(u, v) \mathbf{k}, \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Ako se ploha S sastoji od konačno glatkih ploha, a na spojnim krivuljama ne postoje tangencijalne ravnine, kažemo da je S *po dijelovima glatka ploha*. Skup svih točaka u kojima ne postoji tangencijalna ravnina ima površinu nula pa ga kod računanja integrala možemo zanemariti. Na primjer, ploha na slici 3.3 sastoji se od četiri glatke plohe, S_1 , S_2 , S_3 i S_4 .



Slika 3.3. Po dijelovima glatka ploha

Sada možemo definirati površinu plohe.

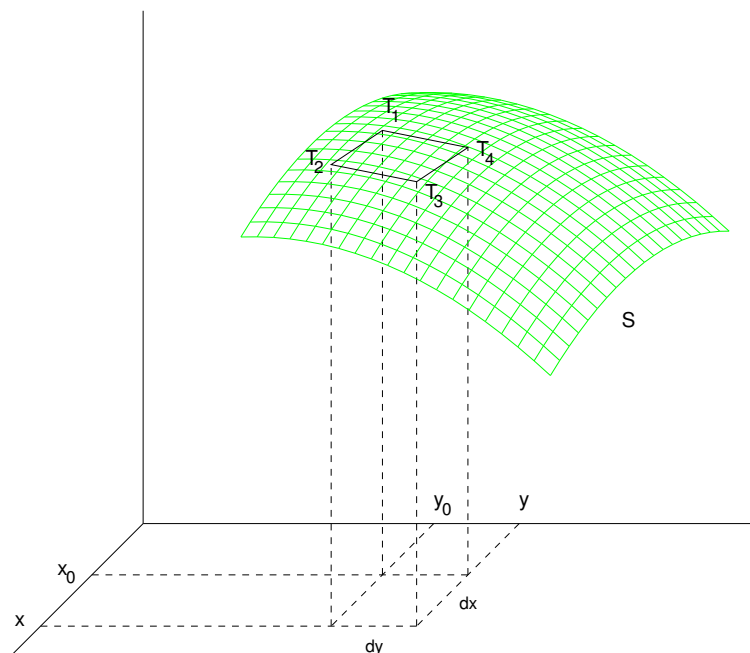
Definicija 3.2 Neka je $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, gdje je $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, i neka je $D \subset D'$ skup koji je zatvoren i omeđen po dijelovima glatkom krivuljom. Ako se ploha S ortogonalno projicira na skup D te je pri tome zadana jednadžbom

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

onda je *površina plohe* S definirana kao

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \equiv \iint_D dS.$$

U prethodnoj definiciji izraz dS je *element površine*, dakle, površina je jednaka "beskonačnom zbroju" (integral) beskonačno malih elemenata površine. Objasnilo formulu za element površine dS pomoću slike 3.4.



Slika 3.4. Element površine plohe

Dio plohe S koji se projicira na pravokutnik

$$(x_0, y_0), \quad (x_0 + dx, y_0), \quad (x_0 + dx, y_0 + dy), \quad (x_0, y_0 + dy)$$

aproksimiramo paralelogramom koji leži u tangencijalnoj ravnini plohe S u točki $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, a projicira se na taj pravokutnik. Jednadžba tangencijalne ravnine glasi [M2, poglavlje 3.7]

$$z - g(x_0, y_0) = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0).$$

Vrhovi paralelograma su

$$\begin{aligned} T_1 &= (x_0, y_0, g(x_0, y_0)), \\ T_2 &= \left(x_0 + dx, y_0, g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} dx \right) \\ T_3 &= \left(x_0 + dx, y_0 + dy, g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} dy \right) \\ T_4 &= \left(x_0, y_0 + dy, g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} dy \right). \end{aligned}$$

Površina paralelograma je [M1, poglavlje 3.10]

$$dS \approx |\overrightarrow{T_1 T_2} \times \overrightarrow{T_1 T_4}| = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & 0 & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} dx \\ 0 & dy & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} dy \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \mathbf{i} \left(-\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} dx dy \right) + \mathbf{j} \left(-\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} dx dy \right) + \mathbf{k} (dx dy) \right| \\
&= dx dy \sqrt{\left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2 + 1},
\end{aligned}$$

a površina plohe je suma svih dS , odnosno

$$P(S) = \iint_D dS.$$

Ako je funkcija $g(x, y)$ implicitno zadana jednadžbom $G(x, y, z) = 0$, onda iz [M2, poglavlje 3.11, napomena 3.12]

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}}$$

slijedi

$$P(S) = \iint_D \frac{1}{\left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|} \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^2} dx dy.$$

3.2 Plošni integral skalarnog polja

Definicija 3.3 Neka je $f : D' \rightarrow \mathbb{R}$ skalarno polje, gdje je $D' \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup. Neka je S ploha sadržana u D' zadana funkcijom

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

gdje je D zatvoren skup omeđen s po djelovima glatkom krivuljom. *Plošni integral skalarnog polja f po plohi S* je broj

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Plošni integral skalarnog polja još zovemo i *integral po projekciji* i *plošni integral prve vrste*.

Plošni integral skalarnog polja po po djelovima glatkoj plohi S sastavljenoj od ploha S_1, \dots, S_k definiramo kao

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS + \dots + \iint_{S_k} f dS.$$

Ako je f površinska gustoća plohe S , onda $\iint_S f dS$ daje *masu* plohe. Ako stavimo $f = 1$, onda $\iint_S dS$ daje površinu plohe kao što smo već vidjeli.

Bez dokaza navodimo sljedeće tvrdnje:

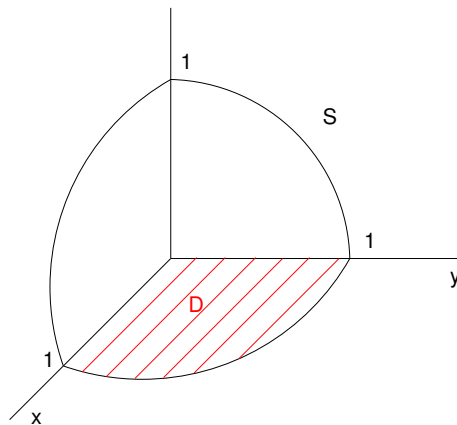
- i) plošni integral skalarnog polja ne ovisi ni o parametrizaciji plohe niti o njenoj orijentaciji (vidi poglavlje 3.3),
- ii) plošni integral skalarnog polja je linearan, odnosno

$$\iint_S (\lambda f + \mu g) dS = \lambda \iint_S f dS + \mu \iint_S g dS.$$

Primjer 3.1 Izračunajmo

$$I = \iint_S (x + y + z) dS,$$

gdje je S dio središnje jedinične sfere u prvom oktantu. Ploha S prikazana je na slici 3.5.



Slika 3.5. Dio središnje jedinične sfere

Plohu možemo opisati s

$$S = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, z = \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Dakle, područje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ opisano je s

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

dok je $g(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Iz

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

slijedi

$$1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

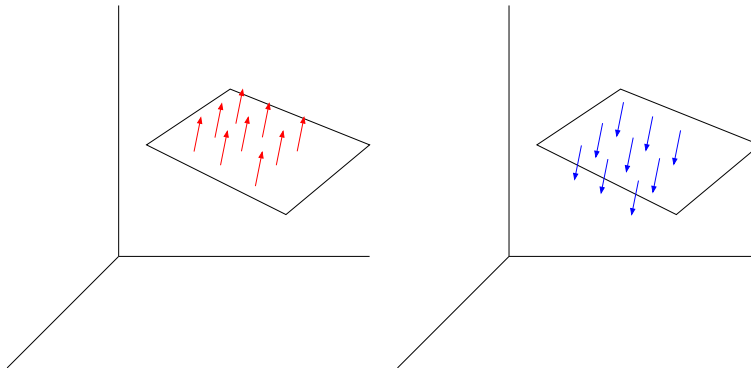
pa je

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x + y + \sqrt{1-x^2-y^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi/2] \\ y = r \sin \varphi, \quad r \in [0, 1] \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r \cos \varphi + r \sin \varphi + \sqrt{1-r^2}) \frac{r \, dr}{\sqrt{1-r^2}} \, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi) \, d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \, dr + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r \, dr = \dots = \frac{3}{4} \pi.
\end{aligned}$$

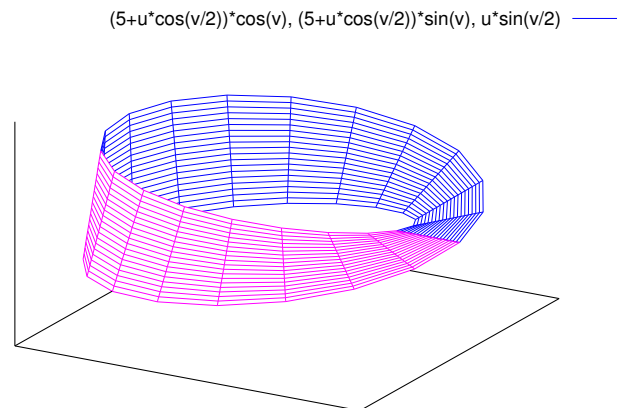
3.3 Plošni integral vektorskog polja

Orijentaciju plohe u danoj točki definiramo kao orijentaciju normale tangencijalne ravnine u toj točki – svaka točka ima dvije moguće orijentacije. Zanimaju nas samo *dvostrane plohe*, odnosno plohe koje imaju dvije neprekidne orijentacije (vidi sliku 3.6).



Slika 3.6. Neprekidne orijentacije glatke plohe

Primjer *jednostrane plohe* koja nema dvije već samo jednu neprekidnu orijentaciju je Möbiusova vrpca prikazana na slici 3.7.



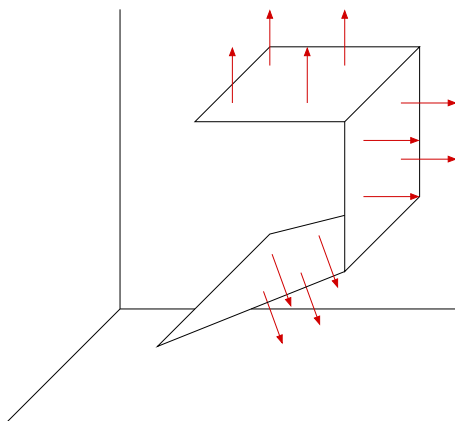
Slika 3.7. Möbiusova vrpca

Parametarska jednadžba Möbiusove vrpce poluširine a i središnje kružnice radijusa r je

$$\begin{aligned}x &= (r + u \cos(v/2)) \cos v, \\y &= (r + u \cos(v/2)) \sin v, \quad u \in [-a, a], \quad v \in [0, 2\pi], \\z &= u \sin(v/2).\end{aligned}$$

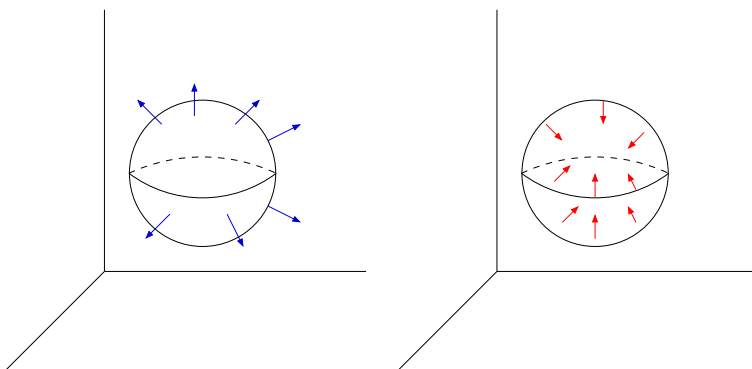
Möbiusova vrpca se koristi kod konvejskih traka kako bi se "obje" strane podjednako trošile i kod vrpca za beskonačno snimanje pri čemu se ujedno udvostručuje kapacitet snimanja.

Kod po dijelovima glatkih ploha sve dijelove moramo orijentirati suglasno kako je prikazano na slici 3.8.



Slika 3.8. Orijehtacija po dijelovima glatke plohe

Kod zatvorenih ploha (na primjer, sfera) imamo vanjsku i unutrašnju orijentaciju (vidi sliku 3.9).



Slika 3.9. Vanjska i unutrašnja orijentacija sfere

Jedna od neprekidnih orijentacija dvostrane plohe S zadane jednadžbom

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

je dana poljem jediničnih vektora normale,

$$\mathbf{n}_0 = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}. \quad (3.1)$$

Plohu orijentiranu u smislu polja \mathbf{n}_0 označavamo sa \vec{S} . Druga neprekidna orijentacija plohe S je $-\mathbf{n}_0$, a plohu orijentiranu pomoću te orijentacije označavamo sa \overleftarrow{S} .

Definicija 3.4 Neka je $\mathbf{w} : D' \rightarrow V_0$, $D' \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno vektorsko polje. Neka je glatka ploha $S \subseteq D'$ zadana funkcijom

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

gdje je D otvoren skup s rubom koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja. *Plošni integral vektorskog polja \mathbf{w} po orijentiranoj plohi D* je broj

$$\iint_D \left(w_x \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \right) + w_y \left(-\frac{\partial g}{\partial y} \right) + w_z \right) dx dy.$$

Koristeći definicije polja jediničnih normala \mathbf{n}_0 i elementa površine dS , uz oznaku

$$d\vec{S} = \mathbf{n}_0 dS,$$

možemo pisati

$$\iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S} = \iint_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_0 dS. \quad (3.2)$$

Ovaj izraz nam ujedno daje i vezu plošnog integrala prve i druge vrste – plošni integral vektorskog polja \mathbf{w} po orijentiranoj plohi \vec{S} jednak je plošnom integralu skalarnog polja $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_0$ po neorijentiranoj plohi S .¹

Plošni integral vektorskog polja po po djelovima glatkoj plohi \vec{S} sastavljenoj od suglasno orijentiranih ploha $\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_k$ definiramo kao

$$\iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S} = \iint_{\vec{S}_1} \mathbf{w} d\vec{S} + \iint_{\vec{S}_2} \mathbf{w} d\vec{S} + \dots + \iint_{\vec{S}_k} \mathbf{w} d\vec{S}.$$

U fizici se $\iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S}$ zove *tok* ili *fluks* vektorskog polja \mathbf{w} kroz plohu \vec{S} .

Bez dokaza navodimo sljedeće tvrdnje:

- (i) plošni integral vektorskog polja ne ovisi o parametrizaciji plohe, ali promjenom orijentacije mijenja predznak,

$$\iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S} = - \iint_{\overleftarrow{S}} \mathbf{w} d\vec{S}.$$

- (ii) plošni integral vektorskog polja je linearan, odnosno

$$\iint_{\vec{S}} (\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{u}) d\vec{S} = \lambda \iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S} + \mu \iint_{\vec{S}} \mathbf{u} d\vec{S}.$$

¹Orijentacija plohe uključena je kroz izbor polja jediničnih normala, odnosno o orijentaciji ovisi da li ćemo uzeti polje \mathbf{n}_0 ili polje $-\mathbf{n}_0$.

Polje jediničnih normala \mathbf{n}_0 možemo izraziti i pomoću kosinusa smjerova [M1, poglavlje 3.6],

$$\mathbf{n}_0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

pri čemu su $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$ funkcije od x , y i z . Tada izraz (3.2) možemo zapisati kao

$$\iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S} = \iint_S (w_x \cos \alpha + w_y \cos \beta + w_z \cos \gamma) dS.$$

Koristeći formulu (3.1) za \mathbf{n}_0 imamo

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}},$$

pa je

$$\iint_S w_z \cos \gamma dS = \iint_S w_z dx dy.$$

No, ako plohu S opišemo pomoću projekcije na yz -ravninu funkcijom

$$x = g_1(y, z), \quad (y, z) \in D_1,$$

onda je

$$\mathbf{n}_0 = \frac{-\frac{\partial g_1}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial g_1}{\partial z} \mathbf{k} + \mathbf{i}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)^2}},$$

pa je

$$\iint_S w_x \cos \alpha dS = \iint_S w_x dy dz.$$

Slično, ako plohu S opišemo pomoću projekcije na xz -ravninu funkcijom

$$y = g_2(x, z), \quad (x, z) \in D_2,$$

onda je

$$\iint_S w_y \cos \beta dS = \iint_S w_y dx dz$$

pa imamo

$$\iint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S} = \iint_S w_x dy dz + w_y dx dz + w_z dx dy.$$

Kod primjene ove formule još treba ispravno odrediti *predznak* integrala:

- kod prvog integrala, $\iint_S w_x dy dz$, predznak će biti "+" ako je kut između tražene normale i vektora \mathbf{i} manji ili jednak $\pi/2$,

$$\angle(\mathbf{n}_0, \mathbf{i}) \leq \frac{\pi}{2},$$

a u protivnom će predznak biti "-";

- kod drugog integrala, $\iint_S w_y dx dz$, predznak će biti "+" ako je kut između tražene normale i vektora \mathbf{j} manji ili jednak $\pi/2$, a u protivnom će predznak biti "-"; i
- kod trećeg integrala, $\iint_S w_z dx dy$, predznak će biti "+" ako je kut između tražene normale i vektora \mathbf{k} manji ili jednak $\pi/2$, a u protivnom će predznak biti "-" (vidi primjer 3.1).

Kako smo u izvodu prethodne formule zadanu plohu projicirali na tri koordinatne ravnine, plošni integral vektorskog polja još zovemo i *integral po projekcijama*. Uz oznake (2.1) iz prethodnih formula slijedi

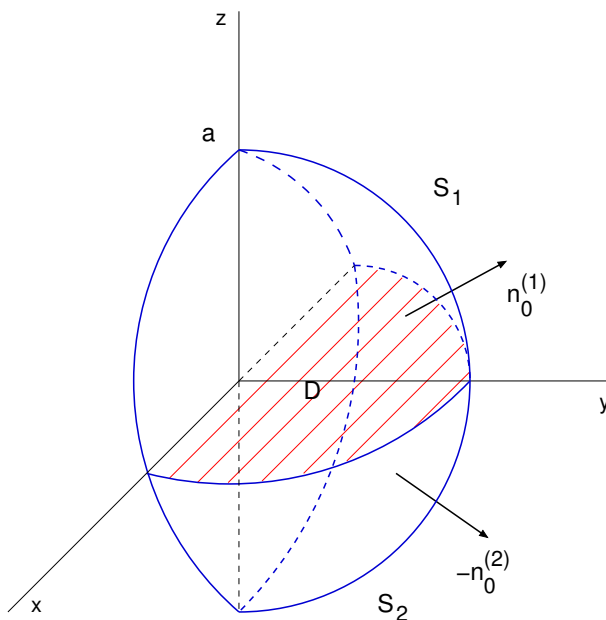
$$\iint_{\vec{S}} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Primjer 3.2 Izračunajmo

$$I = \iint_{S^+} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy,$$

gdje je S^+ vanjska strana desne polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

a) Integral ćemo prvo riješiti svođenjem na plošni integral skalarnog polja prema definiciji 3.4. Ploha je prikazana na slici 3.10.



Slika 3.10. Desna orijentirana polusfera

Vidimo da se oba dijela plohe, S_1 i S_2 projiciraju na isti skup D u xy -ravnini vrijedi

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}, \\ S_1 &\dots z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D, \\ S_2 &\dots z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Za plohu S_1 vrijedi (uz $a > 0$)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

i

$$\mathbf{n}_0^{(1)} = \frac{\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}} = \frac{x}{a} \mathbf{i} + \frac{y}{a} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a} \mathbf{k}.$$

Dakle,

$$I_1 = \iint_{S_1^+} \mathbf{w} d\vec{S} = \iint_D \left(x^2 \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y^2 \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + a - x^2 - y^2 \right) dx dy.$$

Za plohu S_2 vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

pa je

$$\mathbf{n}_0^{(2)} = -\frac{x}{a} \mathbf{i} - \frac{y}{a} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a} \mathbf{k}.$$

No, kako nam je potrebna vanjska normala plohe S_2 , umjesto polja vanjskih normala $\mathbf{n}_0^{(2)}$ uzet ćemo polje $-\mathbf{n}_0^{(2)}$, što daje

$$I_2 = \iint_{S_2^+} \mathbf{w} d\vec{S} = \iint_D \left(x^2 \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y^2 \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - a + x^2 + y^2 \right) dx dy.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 2 \iint_D \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi] \\ y = r \sin \varphi, \quad r \in [0, a] \end{array} \right\} \\ &= 2 \int_0^\pi (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) d\varphi \cdot \int_0^a \frac{r^3 r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = \dots = \frac{a^4}{2} \pi. \end{aligned}$$

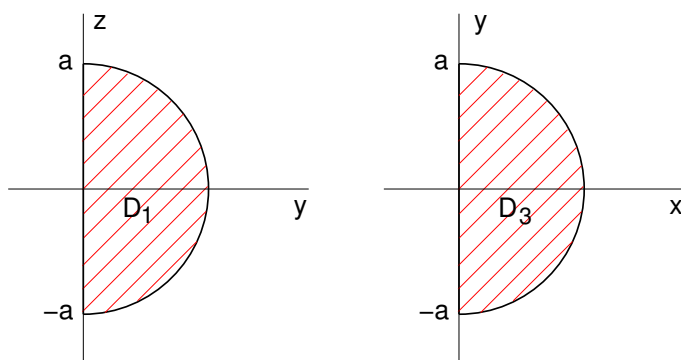
b) Sada ćemo itegral riješiti direktno po projekcijama,

$$I = \iint_{S^+} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Za integral I_1 , ploha S se projicira na polukružnici prikazanu na slici 3.11.

Za polovicu polusfere za koju je $x \geq 0$ uzimamo predznak ”+” jer je ku vanjske normale s vektorom \mathbf{i} manji ili jednak $\pi/2$, a za polovicu plosfere za koju je $x \leq 0$ uzimamo predznak ”-” (vidi sliku 3.10) pa uz $x^2 = a^2 - y^2 - z^2$ vrijedi

$$I_1 = \overset{\mathbf{n}}{+} \iint_{D_1} (a^2 - y^2 - z^2) dy dz - \overset{\mathbf{n}}{-} \iint_{D_1} (a^2 - y^2 - z^2) dy dz = 0.$$

Slika 3.11. Projekcije desne orijentirane polusfere na yz -ravninu i xy -ravninu

Analogno, za I_3 imamo

$$I_3 = \overset{\mathbf{n}}{+} \iint_{D_3} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy - \overset{\mathbf{n}}{-} \iint_{D_3} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = 0,$$

gdje je D_3 prikazan na slici 3.11.

Za I_3 se cijela ploha S projicira na središnji krug radijusa a u xz -ravnini. Predznak integrala je "+" jer vanjska normala zatvara s vektorom \mathbf{j} kut manji ili jednak $\pi/2$ (vidi sliku 3.10). Iz $y^2 = a^2 - x^2 - z^2$ konačno imamo

$$\begin{aligned} I = I_2 &= \overset{\mathbf{n}}{+} \iint_{D_2} (a^2 - x^2 - z^2) dx dz = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = r \sin \varphi, \quad r \in [0, a] \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr d\varphi = 2\pi \left(a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{2} \pi. \end{aligned}$$

Zadatak 3.2 Riješite integral iz primjera 3.1 svođenjem na plošni integral skalarnog polja ali tako da plohu ne treba rastavljati na dva dijela. Objasnite fizikalno rješenje primjera 3.1 na način b).

3.4 Teoremi o divergenciji, gradijentu i rotoru

Cirkulaciju vektorskog polja \mathbf{w} kroz zatvorenu orijentiranu plohu S označavamo s

$$\oiint_{\vec{S}} \mathbf{w} d\vec{S}.$$

Zatvorenu plohu koja omeđuje zatvoreno područje $V \subseteq \mathbb{R}^3$ (*rub područja* V) označavamo s ∂V odnosno s $\overrightarrow{\partial V}$ ukoliko je ploha orijentirana.

Teorem 3.1 (Teorem o divergenciji, Gauss-Ostrogradski formula) *Neka je $\mathbf{w} : V' \rightarrow V_0$ neprekidno diferencijabilno vektorsko polje i neka je $V \subseteq V' \subseteq \mathbb{R}^3$ zatvoreno područje omeđeno s po dijelovima glatkom plohom ∂V (koja ne presijeca samu sebe). Neka je ploha $\overrightarrow{\partial V}$ orijentirana poljem vanjskih normala. Tada vrijedi*

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{w} \, dV = \oiint_{\overrightarrow{\partial V}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS.$$

Teorem 3.1 daje jedno poopćenje Greenovog teorema na trodimenzionalni slučaj. Naime, u dvodimenzionalnom prostoru Greenovu formulu iz teorema 2.2,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_{\overrightarrow{C}} P \, dx + Q \, dy$$

možemo neformalno interpretirati kao:

integral "derivacije" po plohi = cirkulacija po orijentiranoj
omeđenoj zatvorenom krivuljom = krivulji koja omeđuje plohu

Analogno, Gauss-Ostrogradski formulu možemo interpretirati kao

integral "derivacije" po volumenu = cirkulacija po orijentiranoj
omeđenom zatvorenom plohom = plohi koja omeđuje volumen

Uz oznake

$$\mathbf{w} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

teorem 3.1 možemo pisati u skalarnoj formi:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \oiint_{\overrightarrow{\partial V}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS.$$

Primjer 3.3 Izračunajmo

$$I = \oiint_{\overrightarrow{S}} x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dx \, dz + z^3 \, dx \, dy,$$

gdje je \overrightarrow{S} sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orijentirana poljem vanjskih normala. Iz

$$\mathbf{w} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2,$$

primjenom Gauss-Ostrogradski formule i prelaskom na sferne koordinate imamo

$$I = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dx \, dy \, dz = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi] \\ z = r \cos \theta \quad \quad \quad r \in [0, a] \\ J = r^2 \sin \theta \end{array} \right\}$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^a r^2 \cdot r^2 \, dr = \frac{12}{5} \pi a^5.$$

Primjer 3.4 Izračunajmo

$$I = \oint_{\vec{S}} x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy,$$

gdje je S proizvoljna po djelovima glatka zatvorena ploha koja omeđuje područje $V \subseteq \mathbb{R}^3$, a orijentirana je poljem vanjskih normala. Vrijedi

$$I = \iiint_V (1 + 1 + 1) \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = 3 \int_V dV.$$

Dakle, volumen područja V jednak je

$$V(V) = \frac{1}{3} \oint_{\vec{S}} x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy.$$

Ova formula je poopćenje korolara 2.1 za $n = 3$.

Kao što smo već kazali, Teorem o divergenciji daje vezu dvostrukog integrala po plohi i trostrukog integrala "derivacije" po području omeđenom tom plohom. Imamo još dvije slične veze. Definirajmo integrale

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{w} \, dV &= \mathbf{i} \iiint_V w_x \, dV + \mathbf{j} \iiint_V w_y \, dV + \mathbf{k} \iiint_V w_z \, dV, \\ \iint_S \mathbf{w} \, dS &= \mathbf{i} \iint_S w_x \, dS + \mathbf{j} \iint_S w_y \, dS + \mathbf{k} \iint_S w_z \, dS. \end{aligned}$$

U iskazima sljedeća dva teorema V je područje omeđeno s po dijelovima glatkom plohom ∂V , a \mathbf{n}_0 je polje vanjskih normala.

Teorem 3.2 (Teorem o gradijentu) Vrijedi

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{grad } f \, dV &= \oint_{\partial V} f \, \mathbf{n}_0 \, dS \\ &= \mathbf{i} \oint_{\partial V} f \cos \alpha \, dS + \mathbf{j} \oint_{\partial V} f \cos \beta \, dS + \mathbf{k} \oint_{\partial V} f \cos \gamma \, dS. \end{aligned}$$

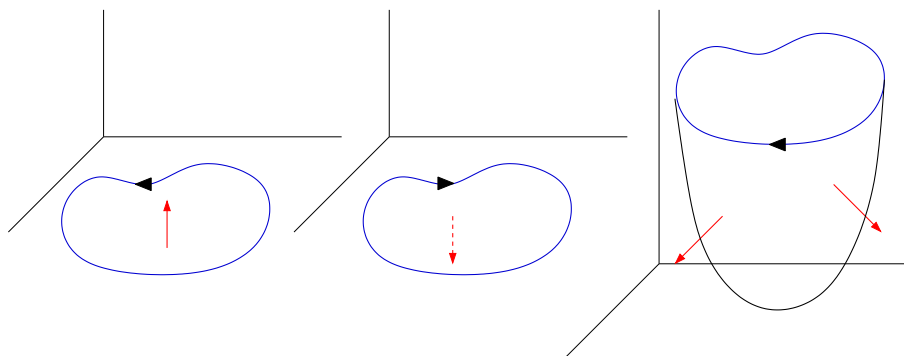
Teorem 3.3 (Teorem o rotaciji) Vrijedi

$$\iiint_V \text{rot } \mathbf{w} \, dV = \oint_{\partial V} (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{w}) \, dS.$$

3.5 Stokesova formula

Stokesova formula je poopćenje Greenove formule iz poglavlja 2.5 na plohe i krivulje u prostoru.

Konzistentna orijentacija plohe i njenog ruba je kada orijentacija ruba zajedno s normalom u svakoj točki plohe čine desni koordinatni sustav. Možemo se izraziti i drukčije: plohu i njen rub orijentiramo tako da gledano iz vrha bilo koje normale rub bude pozitivno orijentiran. Konzistentne orijentacije plohe prikazane su na slici 3.12.



Slika 3.12. Konzistentne orijentacije plohe i njenog ruba

Teorem 3.4 (Stokes) Neka je $\mathbf{w} : D \rightarrow V_0$ neprekidno diferencijabilno vektorsko polje, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup. Neka je \vec{S} po dijelovima glatka ploha orijentirana poljem jediničnih vektora normale \mathbf{n}_0 i neka je $\vec{\partial S}$ konzistentno orijentiran tub plohe \vec{S} (∂S je po dijelovima glatka krivulja). Tada vrijedi

$$\iint_{\vec{S}} \operatorname{rot} \mathbf{w} d\vec{S} = \oint_{\vec{\partial S}} \mathbf{w} d\mathbf{r} = \oint_{\partial S} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_0 ds.$$

U skalarnom obliku Stokesova formula glasi

$$\oint_{\vec{\partial S}} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

Primjer 3.5 Izračunajmo cirkulaciju vektorskog polja

$$\mathbf{w} = x^2 y^3 \mathbf{i} + \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

duž ruba plohe

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

orijentiranog u negativnom smislu gledano iz vrha vektora $-\mathbf{k}$.

Ploha S je gornja polusfera radijusa $\sqrt{2}$. Iz slike 3.13 zaključujemo da je ploha S orijentirana vanjskom normalom sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ te da je rub plohe kružnica K koja omeđuje krug D .

Izračunajmo $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$ (odnosno \mathbf{n}_0) kako bi primijenili skalarni oblik Stokesove formule. Vrijedi

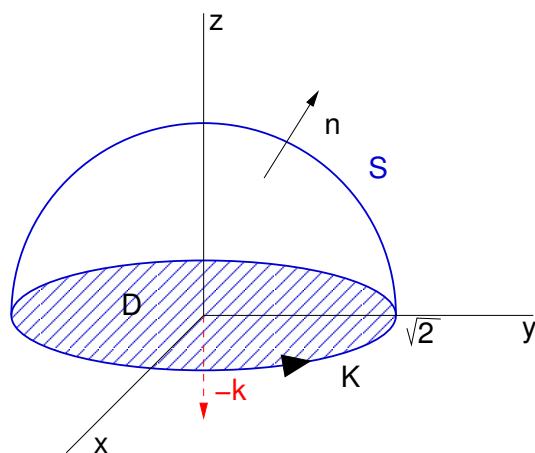
$$\mathbf{n}_0 = \frac{x}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

pa je

$$I = \oint_{\vec{K}} (x^2 y^2 dx + dy + z dz) = \iint_S \left[(0 - 0) \frac{x}{\sqrt{2}} + (0 - 0) \frac{y}{\sqrt{2}} + (0 - 3x^2 y^2) \frac{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{2}} \right] dS.$$

Ovo je plošni integral skalarnog polja kojeg ćemo riješiti projiciranjem plohe S na xy -ravninu – projekcija je središnji krug D radijusa $\sqrt{2}$. Dakle,

$$I = \iint_D (-3x^2 y^2) \cdot \frac{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dx dy$$



Slika 3.13. Gornja polusfera i njen rub

$$\begin{aligned}
 &= -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin \varphi, \quad r \in [0, \sqrt{2}] \end{array} \right\} \\
 &= -3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \dots = -\pi.
 \end{aligned}$$